УДК 551.5
DOI: 10.62955/0135-3748-2026-424
Orcid 0009-0001-9653-7712

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В АТМОСФЕРЕ

А.С. Долгая[1], В.П. Лебедев[2]

[1]Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия
[2]Институт солнечно-земной физики Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск, Россия,
dolgayaanasta@gmail.com

SIMULATION OF ACOUSTIC-GRAVITY WAVE PROPAGATION IN THE ATMOSPHERE

A.S. Dolgaya[1], V.P. Lebedev[2]

[1]Irkutsk State University, Irkutsk
[2]Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS, Irkutsk, Russia

Аннотация. В работе построена и исследована численная модель линейных возмущений атмосферы в постановках для однородной среды и для стратифицированной баротропной атмосферы в поле силы тяжести. Проведен анализ и сравнение откликов этих сред на одинаковые импульсы.

Ключевые слова: численное моделирование, линейные возмущения, акустические волны, однородная атмосфера, стратификация.

Abstract. We have developed and studied the numerical model of linear perturbations of the atmosphere for two formulations: homogeneous medium and the stratified barotropic atmosphere under gravity. The response of each medium to identical impulsive excitation has been analyzed and compared.

Keywords: numerical modeling, linear perturbations, acoustic waves, homogeneous atmosphere, stratification.

ВВЕДЕНИЕ

Акустико-гравитационные волны (АГВ) переносят энергию из нижних слоев атмосферы и влияют на состояние ионосферы и условия распространения радиоволн. Построение корректной модели распространения АГВ необходимо для анализа наблюдений с помощью различных инструментов в радиофизических и геофизических обсерваториях, в том числе на ИРНР в Обсерватории радиофизической диагностики атмосферы ИСЗФ СО РАН и на инструментах других обсерваторий НГК РАН, и позволит продвинуться в изучении механизмов переноса энергии и взаимодействия нейтральной атмосферы и ионосферной плазмы.

При адаптации существующих атмосферных моделей к рассматриваемой задаче возникали численные неустойчивости и несоответствие наблюдаемым эффектам, отсутствовала возможность настройки и модификации, поэтому было принято решение о необходимости разработки собственной модели. Для построения такой модели необходимо установить, какие эффекты воспроизводятся в рамках более простых приближений, и разграничить акустические процессы и явления, обусловленные действием гравитации и стратификацией среды. В данной работе рассматривается этап построения модели, в котором изучаются акустические возмущения в однородной среде и в изотермической стратифицированной атмосфере в поле силы тяжести. В первом случае описывается чисто акустический режим, во втором — режим без восстанавливающей плавучести. Цель данного этапа состоит в построении и исследовании численной модели локальной атмосферы, которая корректно воспроизводит акустические возмущения и позволяет проследить, как меняется поведение среды при включении силы тяжести.

ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ И ВЕРИФИКАЦИИ РЕШЕНИЙ

Численная модель строится поэтапно, что позволяет последовательно наращивать физическую сложность и контролировать корректность реализации на каждом шаге. В однородной среде рассматриваются две физически эквивалентные постановки при согласованных начальных условиях. Их сопоставление позволяет проверить, что свойства решения определяются физикой задачи, а не особенностями выбранной численной схемы.

Моделирование проводилось на равномерной сетке. Для волнового уравнения применялась явная конечно-разностная схема «крест» (рис. 1) [Турчак, 1987, с. 272–276]. Значение в новом временном слое вычисляется по значениям в двух предыдущих временных слоях и соседних пространственных узлах.

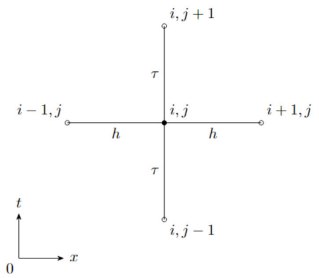

Рис. 1. Крест-схема

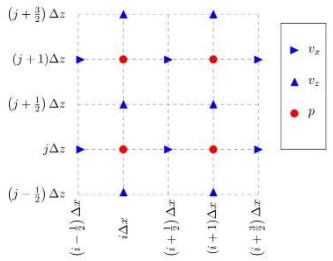

Рис. 2. Разнесенная сетка

При решении линеаризованной системы уравнений применялся явный конечно-разностный метод «чехарда» в сочетании с разнесенной сеткой. Возмущение давления вычисляется в целых, компоненты скорости — в полуцелых узлах (рис. 2). Это позволяет аппроксимировать пространственные производные центральными разностями и обеспечивает хорошее сохранение энергии. Условие устойчивости обеих схем имеет вид условия Куранта — Фридрихса — Леви. Верификация результатов проводилась сравнением с теоретическими результатами или с известными качественными свойствами решения, где это возможно; сопоставлением результатов, полученных в разных, но физически эквивалентных постановках; контролем выполнения закона сохранения энергии.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Однородная атмосфера

Рассматривается акустическое приближение, соответствующее однородной атмосфере без вертикальной стратификации (см. [Тихонов, Самарский, 1977, с. 36]). Фоновая плотность и давление постоянны. Предполагается адиабатический характер процесса, внешние силы отсутствуют, вклад силы тяжести не учитывается. Допущение о малости возмущений позволяет перейти к линеаризованной системе уравнений (1), которая далее сводится к волновому уравнению (2).

$$\{\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c^2 \nabla \cdot v' = 0, \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\nabla p' = 0. \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \Delta p' = 0. \quad (2)$$

Исследуются три случая: отклик системы на мгновенное точечное воздействие в одномерной (x, t) и в двумерной (x, z, t) постановке, а также неоднородная задача с точечным монохроматическим источником. Численные осцилляции подавлялись гладкими аппроксимациями δ-функции и функции Хевисайда. Для всех рассмотренных случаев теоретические решения известны, наблюдалось хорошее согласие численного и теоретического решений.

В одномерном случае рассматривается задача (3) с импульсным воздействием в момент t=0:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = \delta(x)\delta(t),$$

$$p'(x,0) = 0, \ \frac{\partial p'}{\partial t}(x,0) = 0. \quad (3)$$

Действие источника эквивалентно скачку производной, поэтому влияние импульса можно учесть через начальные условия. Из первого уравнения системы (1) получаем требование на начальную скорость в эквивалентной постановке этой задачи:

$$\{\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c^2 \frac{\partial v'}{\partial x} = 0, \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} = 0.$$

$$p'(x,0) = 0, \qquad v'(x,0) = -\frac{1}{\rho_0 c^2} H(x). \quad (4)$$

После задания соответствующих начальных данных решение соответствует функции Грина и в одномерном случае имеет вид $p'(x,t) = \frac{1}{2c} H(t) H(ct - |x|)$.

Различия в области резких фронтов связаны с гладкой аппроксимацией импульса (рис. 3). Зависимость энергии от времени демонстрирует ее сохранение в отсутствие источников.

В двумерном случае отклик на точечное мгновенное воздействие удовлетворяет уравнению (5). Задачу, как и в одномерном случае, можно переписать в эквивалентной форме (6).

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2}\right) = \delta(x)\delta(z)\delta(t),$$

$$p'(x,z,0) = 0, \quad \frac{\partial p'}{\partial t}(x,z,0) = 0 \quad (5)$$

$$\{\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c^2 \left(\frac{\partial v_x'}{\partial x} + \frac{\partial v_z'}{\partial z}\right) = 0, \frac{\partial v_x{}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v_z{}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z} = 0, p'(x,z,0) = 0,$$

$$v_x{}'(x,z,0) = -\frac{1}{2\rho_0 c^2}\delta(z)H(x),$$

$$v_z{}'(x,z,0) = -\frac{1}{2\rho_0 c^2}\delta(x)H(z). \quad (6)$$

Аналитическое решение известно и задается формулой $p'(x,z,t) = \frac{H(t)}{2\pi c}\frac{H(c^2t^2 - x^2 - z^2)}{\sqrt{c^2t^2 - x^2 - z^2}}$.

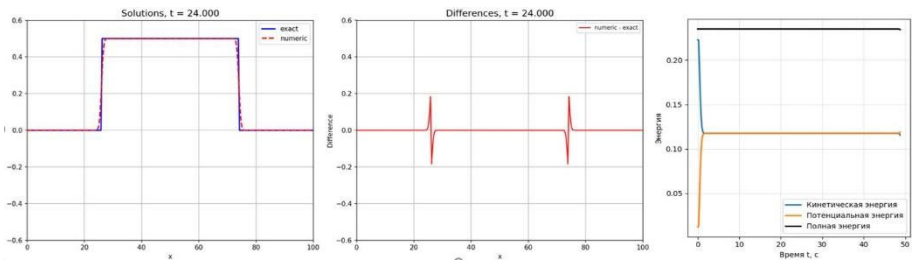

Рис. 3. Функция Грина 1D

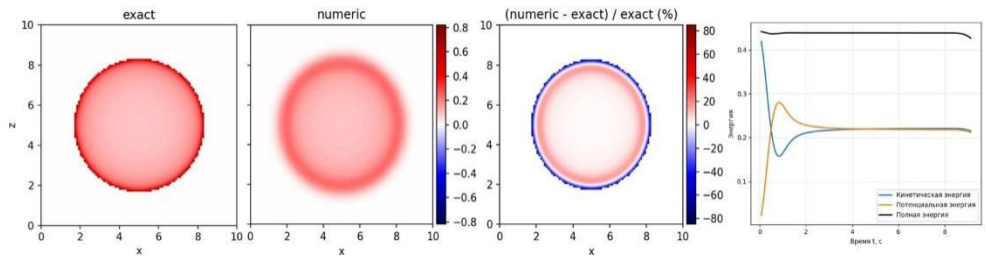

Рис. 4. 2D-функция Грина

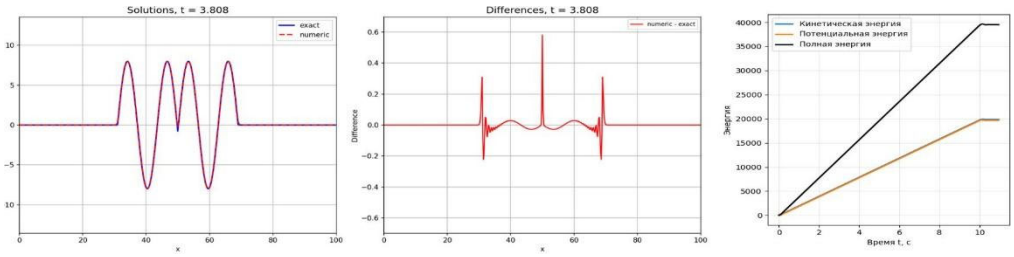

Рис. 5. Точечный монохроматический источник

Численное решение в двумерной постановке представляет собой цилиндрическую волну с более пологим фронтом, чем предсказывает теория (рис. 4), т. е. наблюдается тот же эффект, что и в одномерном случае.

Рассмотрим решение неоднородной задачи с источником в правой части. Связь между неоднородным волновым уравнением (7) и линеаризованной акустической системой (8):

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \Delta p' = f(r,t), \qquad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c^2 \nabla \cdot v' = h(r,t), \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p' = g(r,t), \end{cases} \qquad (8)$$

выражается формулой $f(r,t) = \frac{\partial h(r,t)}{\partial t} - \rho_0 c^2 \nabla \cdot g(r,t)$.

Выберем функцию источника в правой части как точечный монохроматический источник $f(x,t) = A\delta(x - x_0)e^{-i\omega t} H(t)$, включенный в момент времени t=0. Положим $g(r,t) = 0$, тогда $h(r,t) = A\delta(r)\frac{1-e^{-i\omega t}}{i\omega} H(t)$. Итак, волновому уравнению (9) с нулевыми начальными условиями ставится в соответствие система (10):

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = A\delta(x)e^{-i\omega t} H(t),$$

$$p'(x,0) = 0, \quad \frac{\partial p'}{\partial t}(x,0) = 0. \qquad (9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c^2 \frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{A}{i\omega} \delta(x)(1 - e^{-i\omega t})H(t), \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

$$p'(x,0) = 0, v'(x,0) = 0. \qquad (10)$$

Соответствующее аналитическое решение имеет вид $p'(x,t) = \frac{Ai}{2c\omega}\left(e^{-i\omega\left(t - \frac{|x|}{c}\right)} - 1\right) H(t - \frac{|x|}{c})$.

Расхождения наблюдаются в точке расположения источника и вблизи волновых фронтов и обусловлены сглаженной аппроксимацией разрывных функций (рис. 5). Линейное возрастание полной энергии связано с непрерывным действием внешнего монохроматического источника.

2. Изотермическая стратифицированная атмосфера

Рассматривается баротропная стратифицированная атмосфера в поле силы тяжести (11). Скорость звука c постоянна, что соответствует постоянной температуре фонового состояния. При наличии стационарного фона сила тяжести компенсируется градиентом давления, так что среда остается в покое. В этом случае гидростатическое равновесие $\frac{dp_0}{dz} = -\rho_0 g$ совместно с баротропным соотношением $p' = c^2 \rho'$ приводит к экспоненциальному профилю плотности $\rho_{0(z)} = \rho_{00} e^{-\frac{z}{H}}$, где $H = \frac{c^2}{g}$ — масштаб высоты.

$$\begin{cases} \frac{\partial p'}{\partial t} + c^2 \left(\rho_0 \frac{\partial v_x'}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_0 v_z')}{\partial z}\right) = 0, \\ \frac{\partial v_x'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v_z'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{g}{c^2} p' + \frac{\partial p'}{\partial z}\right) = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Важно отметить, что такая модель не воспроизводит в полном объеме физику внутренних гравитационных волн, поскольку отсутствует восстанавливающая плавучесть: адиабатически смещенный объем воздуха не приобретает силы, возвращающей его в исходное положение.

Исследуем отклик моделей однородной и стратифицированной атмосферы на одинаковое воздействие. Чтобы отчетливее выделить вклад гравитации, в расчетах использовалось значение ускорения свободного падения, существенно превышающее характерное для земной атмосферы.

2.1. Акустический импульс

Начальные условия выбираются в виде локализованного возмущения давления:

$$p'(x,z,0) = Ae^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \quad v_x'(x,z,0) = 0,$$
$$v_z'(x,z,0) = 0. \qquad (12)$$

В верхней части рис. 6 показан отклик однородной среды, в нижней — стратифицированной. В однородной среде возмущение распространяется симметрично, формируя круговой волновой фронт. В стратифицированной возникает вертикальная асимметрия: внизу нагнетается давление, а при распространении возмущения вверх из-за уменьшения фоновой плотности возрастает амплитуда скорости.

2.2. Вертикальный импульс

Начальное возмущение задается вертикальной скоростью (13). Такой выбор начальных условий позволяет проследить, как стратификация и гравитация влияют на эволюцию возмущения, изначально ориентированного в вертикальном направлении:

$$p'(x,z,0) = 0,$$
$$v_x'(x,z,0) = 0,$$
$$v_z'(x,z,0) = Ae^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}. \qquad (13)$$

Вертикальный импульс порождает характерную дипольную структуру поля давления (рис. 7). В однородной среде возмущение распространяется симметрично, а вертикальный импульс эффективнее преобразуется в акустическое давление, тогда как в стратифицированной атмосфере возмущение давления определяется не только дивергенцией скорости, но и вертикальной зависимостью фоновой плотности, что приводит к существенно меньшим амплитудам давления.

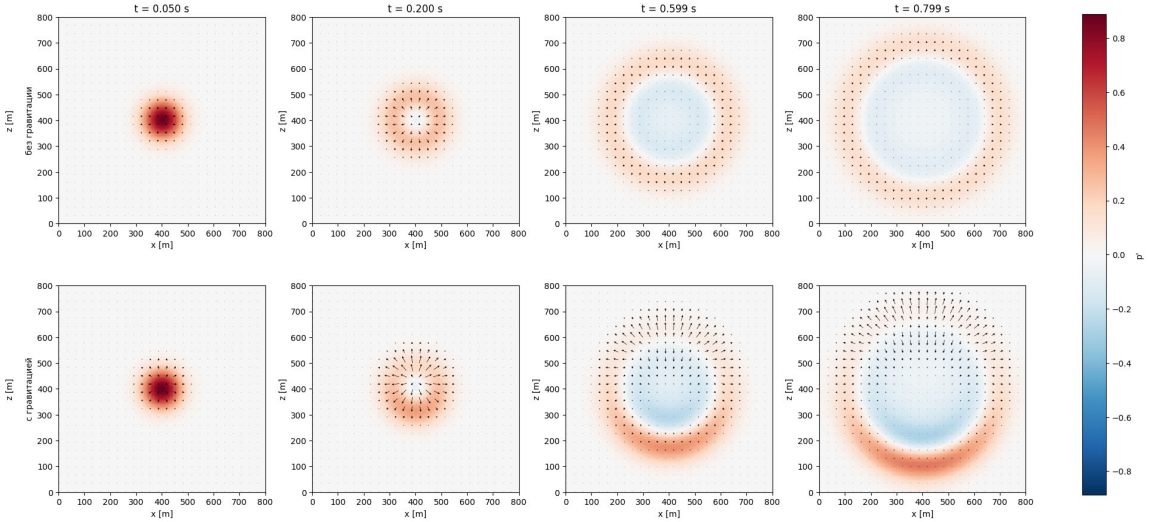

Рис. 6. Акустический импульс в однородной и стратифицированной среде

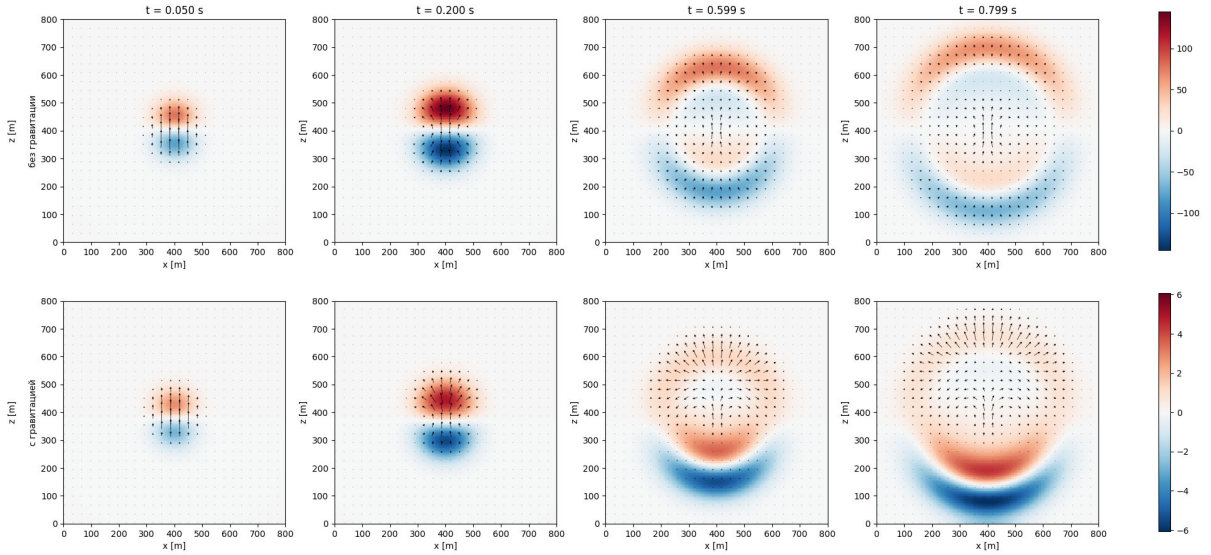

Рис. 7. Вертикальный импульс в однородной и стратифицированной среде

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе разработана и исследована численная модель линейных возмущений локальной атмосферы для двух случаев: однородной акустической среды и стратифицированной баротропной атмосферы в поле силы тяжести. Для однородной среды получено хорошее согласие численных результатов с аналитическими решениями, что подтверждает корректность модели. Показано, что учет стратификации и гравитации заметно изменяет отклик среды: возникает вертикальная асимметрия и меняется соотношение между возмущениями давления и скорости. Полученные результаты задают основу для дальнейшего усложнения физической модели, учета плавучести и перехода к моделированию полноценных АГВ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики : учебник для ун-тов. М. : Наука, 1977. 735 с.

Турчак Л.И. Основы численных методов : учеб. пособие. М. : Наука, 1987. 320 с.