Секция А. Астрофизика и физика Солнца. БШФФ-2026. С. 89–92.

УДК 523.985, 523.9-48, 52-17
DOI: 10.62955/0135-3748-2026-89
ORCID: 0009-0008-7362-2026

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ СПЕКТРА ПРОТОНОВ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ И СВЯЗАННОГО С НИМИ ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ СОЛНЦА: ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА И РЕЗУЛЬТАТЫ

А.В. Кузьмицкий[1], А.А. Кочанов[1, 2]

[1] Институт солнечно-земной физики Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск, Россия, a.kuzmitskiy@iszf.irk.ru
[2] Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия

MODELING THE SPECTRUM EVOLUTION OF HIGH-ENERGY PROTONS AND THEIR RELATED GAMMA-RAY EMISSION IN THE SOLAR ATMOSPHERE: NUMERICAL SCHEME AND RESULTS

A.V. Kuzmitskiy[1], A.A. Kochanov[1, 2]

[1] Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS, Irkutsk, Russia, a.kuzmitskiy@iszf.irk.ru
[2] Irkutsk State University, Irkutsk, Russia

Аннотация. Солнечная активность ответственна за многие явления космической погоды, прямо влияющие на стабильность наземной и космической инфраструктуры. Среди таких явлений можно выделить солнечные энергичные частицы — в частности, протоны и более тяжёлые ионы, энергии которых при регистрации наземных возрастаний (GLEs) достигают нескольких ГэВ. В отличие от электронов, излучающих в широком энергетическом диапазоне, протоны с энергиями ≥300 МэВ можно обнаружить дистанционно в атмосфере Солнца преимущественно по специфической особенности в спектре гамма-излучения — широкой линии распада нейтральных пионов. При инжекции ускоренных протонов в фотосферу и более плотные слои процессы ионизационного торможения и неупругие ядерные столкновения формируют характерный спектр гамма-излучения с максимумом в области сотен МэВ. Форма этого спектра напрямую зависит от первичного спектра ускоренных ионов и параметров среды, в которой они оказались. В работе представлены этапы численного моделирования и схема расчёта спектров излучения, опирающиеся на решения нестационарного уравнения переноса частиц в солнечной атмосфере в рамках модели «leaky box».

Ключевые слова: солнечные вспышки, ускоренные протоны, гамма-излучение.

Abstract. Solar activity is responsible for many space-weather phenomena that directly affect the stability of ground-based and space infrastructure. Among such phenomena, solar energetic particles can be distinguished, in particular, protons and heavier ions, whose energies reach up to several GeV when ground-level enhancements (GLEs) are registered. Unlike electrons emitting over a wide energy range, protons with energies ≥300 MeV can be detected remotely in the solar atmosphere primarily by a specific feature in the gamma-ray spectrum — a broad line from neutral pion decays. When accelerated protons are injected into the photosphere and denser layers, processes of ionization energy loss and inelastic nuclear collisions form a characteristic gamma-ray spectrum with a maximum in the range of hundreds of MeV. The shape of this spectrum directly depends on the primary spectrum of accelerated ions and the parameters of the medium in which they are found. The paper presents the stages of numerical modeling and the scheme for calculating the emission spectra, based on solutions of the non-stationary particle transport equation in the solar atmosphere within the framework of the “leaky box” model.

Keywords: solar flares, accelerated protons, gamma-ray emission.

ВВЕДЕНИЕ

Процессы, связанные со вспышечной активностью Солнца, часто приводят к ускорению частиц до высоких энергий. Например, энергия протонов и более тяжёлых ионов при регистрации наземных возрастаний (GLEs) может достигать нескольких ГэВ. По сравнению с электронами, которые проявляют себя во всем электромагнитном спектре излучения, информацию об ионах можно получить исходя из порождаемого ими вторичного гамма-излучения. Так, протоны с энергиями от ≈300 МэВ и более, генерируют широкую линию излучения от распада нейтральных пионов в реакциях типа $p + A \rightarrow \pi^0 \rightarrow 2\gamma$ (напр., [Cheng, 1972; Forrest et al., 1985; Murphy et al., 1987]). Регистрация и анализ такого излучения позволяет восстановить спектры ионов в непосредственной близости от источника ускорения, недоступного для прямых *in-situ* измерений.

При рассмотрении эволюции ускоренных ионов и связанного с ними высокоэнергетического гамма-излучения, интерес представляют сценарии с захватом и удержанием частиц в магнитных ловушках (напр., [Ryan, Lee, 1991; Mandzhavidze, Ramaty, 1992]), в качестве которых могут выступать корональные петли. Для корректной интерпретации наблюдаемых спектров излучения требуется надежный теоретический расчёт спектра протонов для разных показателей степени спектра, плотности мишени и типа инжекции.

Описанная в работе схема является шагом к построению нестационарной модели счёта, связывающей спектры высокоэнергичных протонов со спектрами порождаемого ими излучения. В расчёте учтены потери энергии на кулоновские и неупругие ядерные столкновения, процессы регенерации протонов и рождения нейтральных пионов, которые являются основными источниками гамма-излучения при энергиях $E_\gamma > 100$ МэВ.

НЕСТАЦИОНАРНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ЧАСТИЦ В СРЕДЕ

Для исследования эволюции спектров протонов используется уравнение Гинзбурга-Сыроватского [Ginzburg, Syrovatskii, 1964] в рамках модели «leaky box» [Gaisser, 1990; Barghouty, 2012]. Эта модель описывает баланс между темпом инжекции частиц, потерями энергии и высыпанием, не требуя полного моделирования по координатам. Явный учёт диффузионного члена происходит посредством введения в уравнение слагаемого с характерным временем покидания рассматриваемой области взаимодействия τ_{esc}. Предполагается, что первичный спектр инжекции уже сформирован, а возможный вклад от процессов стохастического доускорения в ходе эволюции мал в области высоких энергий ускоренных частиц. Для учёта ядерного состава частиц мишени в фотосфере и более глубоких слоях химический состав среды берётся из [Asplund et al., 2021].

С учётом принятых приближений уравнение переноса частиц имеет вид:

$$\frac{\partial f(E_p,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial E_p}\Big(b(E_p)f(E_p,t)\Big)+\frac{f(E_p,t)}{\tau_{\mathrm{inel}}(E_p)}+ +\frac{f(E_p,t)}{\tau_{\mathrm{esc}}(E_p)}=Q^{\mathrm{p}}(E_p,t)+Q^{\mathrm{s}}(E_p,t)\,, \qquad (1)$$

где $f(E_p,t)$ является функцией распределения протонов, т.е. числом частиц в единице объёма в единице энергии. Функция распределения протонов зависит от кинетической энергии E_p и времени t и связана с изотропной интенсивностью протонов $J_p(E_p,t)=f(E_p,t)v(E_p)/(4\pi)$, где скорость протонов $v(E_p)=c\beta(E_p)$. Коэффициент $b(E_p)\equiv(\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}t)_{\mathrm{coll}}$ в зависимости от задаваемой среды представляет собой потери энергии либо на ионизацию в фотосфере и более глубоких нейтральных слоях и описывается формулой Бете–Блоха [Navas, 2024], либо на кулоновские соударения в полностью ионизованной плазме [Gould, 1972].

Характерное время жизни протонов по отношению к неупругим столкновениям определяется как $\tau_{\mathrm{inel}}(E_p)^{-1}=n\,c\beta(E_p)\,\sigma_{\mathrm{inel}}^{pA}(E_p)$. Для расчёта полного неупругого сечения $\sigma_{\mathrm{inel}}^{pA}(E_p)$ взяты параметризации из [Tripathi et al., 1999; Kafexhiu et al., 2014].

В качестве характерного времени удержания частиц в магнитной ловушке (корональной петле) в работе используется численная модель счёта $\tau_{\mathrm{esc}}(E_p)$ из [Kocharov et al., 2000].

Предполагаем, что первичная функция инжекции следует степенному закону по кинетической энергии $Q^{\mathrm{p}}(E_p,t)\propto E_p^{-\alpha}\Theta(E_p^{\max}-E_p)\,r(t)$, где α — показатель степени спектра протонов, $\Theta(x)$ — функция Хэвисайда с максимальной энергией в спектре $E_p^{\max}$, $r(t)$ — временной профиль инжекции.

Вторичная функция инжекции $Q^s(E_p,t)$ описывает регенерацию протонов в неупругих столкновениях $p+A\to p+X$ (X — система недетектируемых частиц) и имеет вид:

$$Q^{\mathrm{s}}(E_p,t)=nc\int\limits_{E_p^{\mathrm{th}}}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\sigma_{pA}}{\mathrm{d}E_p}(E_p',E_p)\beta(E_p')f(E_p',t)\,\mathrm{d}E_p'\,,$$

где дифференциальное сечение $\mathrm{d}\sigma_{pA}/\,\mathrm{d}E_p$ описывает образование вторичного протона с энергией E_p при неупругом $p+A$ столкновении первичного протона с энергией E_p'. Используемое в работе сечение взято из [Kimel', Mokhov, 1974; Batista, Covolan, 1999].

Решение уравнения переноса с учётом потерь энергии можно получить аналитически, например, используя метод функции Грина. Последующее добавление новых членов уравнения усложняет аналитические выкладки. Поэтому для нужд быстрого и вариативного расчёта переход к численным методам решения является предпочтительным.

ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ЧАСТИЦ

Для численного решения уравнения переноса реализуем центрированную по времени неявную схему второго порядка типа Кранка-Николсон [Press et al., 1992]. Схема приводит к записи уравнения в матричной форме, которое решается с использованием методов линейной алгебры.

Запишем уравнение переноса через конечно-разностное представление на равномерной сетке по времени t с шагом Δt и неравномерной сетке по кинетической энергии E с числом узлов N:

$$\frac{f_k^{j+1}-f_k^j}{\Delta t}=-\frac{\left(\Delta E_{k-1}^k\right)^2 b_{k+1}f_{k+1}^j}{\Delta E_k^{k+1}\Delta E_{k-1}^k\Delta E_{k-1}^{k+1}}- -\frac{\left(\left(\Delta E_k^{k+1}\right)^2-\left(\Delta E_{k-1}^k\right)^2\right)b_k f_k^j}{\Delta E_k^{k+1}\Delta E_{k-1}^k\Delta E_{k-1}^{k+1}}+ +\frac{\left(\Delta E_k^{k+1}\right)^2 b_{k-1}f_{k-1}^j}{\Delta E_k^{k+1}\Delta E_{k-1}^k\Delta E_{k-1}^{k+1}}- -\frac{f_k^j}{\tau_k}+\left(Q^{\mathrm{p}}+Q^{\mathrm{s}}\right)_k\,, \qquad (2)$$

где k — индекс на сетке кинетической энергии E, j — индекс на сетке времени t, и введены новые обозначения:

$$b_{k,k\pm1}=b\left(E_{k,k\pm1}\right)\,,\ \ j\pm1\equiv t\pm\Delta t\,,$$
$$E_i-E_s\equiv\Delta E_s^i\,,\ \text{причём}\ \Delta E_k^{k+1}+\Delta E_{k-1}^k=\Delta E_{k-1}^{k+1}\,,$$
$$\tau_k^{-1}\equiv\tau_{\mathrm{inel}}(E_k)^{-1}+\tau_{\mathrm{esc}}(E_k)^{-1}\,.$$

В случае равномерной сетки по энергии ($\Delta E_{k-1}^k=\Delta E_k^{k+1}\equiv\Delta E$) запись конечно-разностной производной уравнения (2) сведётся к записи центрированной производной: $(f_{k+1}-f_{k-1})/(2\Delta E)$.

Приведение правой части уравнения к усреднённому времени $t_j\to t_{j+1/2}$ (применение схемы Кранка-Николсон) делается заменой каждого f^j на среднее $f^{j+1/2}=(f^j+f^{j+1})/2$.

Далее введём коэффициенты C_1, C_2, C_3, включающие скорость непрерывных потерь

энергии b, и коэффициент C_τ, учитывающий характерные времена $\tau_{\rm esc}$ и $\tau_{\rm inel}$:

$$\mathrm{C}_1 = -\frac{\Delta t\left(\Delta E_{k-1}^{k}\right)^2}{2\Delta E_k^{k+1}\Delta E_{k-1}^{k}\Delta E_{k-1}^{k+1}} b_{k+1}\,,$$

$$\mathrm{C}_2 = -\frac{\Delta t\left(\left(\Delta E_k^{k+1}\right)^2 - \left(\Delta E_{k-1}^{k}\right)^2\right)}{2\Delta E_k^{k+1}\Delta E_{k-1}^{k}\Delta E_{k-1}^{k+1}} b_k\,,$$

$$\mathrm{C}_3 = -\frac{\Delta t\left(\Delta E_k^{k+1}\right)^2}{2\Delta E_k^{k+1}\Delta E_{k-1}^{k}\Delta E_{k-1}^{k+1}} b_{k-1}\,, \qquad \mathrm{C}_\tau = -\frac{\Delta t}{2\tau_k}.$$

С новыми коэффициентами уравнение (2) можно записать в виде:

$$\mathrm{C}_3 f_{k-1}^{j+1} + (1 - \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_\tau) f_k^{j+1} - \mathrm{C}_1 f_{k+1}^{j+1} = \\ = -\mathrm{C}_3 f_{k-1}^{j} + (1 + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_\tau) f_k^{j} + \mathrm{C}_1 f_{k+1}^{j} + \\ + (Q^{\rm p} + Q^{\rm s})_k\, \Delta t\,.$$

На матричном языке необходимо решить следующее уравнение: $\widehat{\mathbf{A}} f^{j+1} = \widehat{\mathbf{B}} f^{j} + (Q^{\rm p} + Q^{\rm s})\,\Delta t$, где $\widehat{\mathbf{A}}$, $\widehat{\mathbf{B}}$ — трёхдиагональные матрицы, элементы которых состоят из коэффициентов $C_{i,\tau}$, $i = 1,2,3$.

В матричном виде последнее уравнение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} D & C_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_3 & D & C_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & D & C_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_3 & D & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C_3 & D & C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & C_3 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-3} \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \overline{D} & C_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_3 & \overline{D} & C_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & \overline{D} & C_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_3 & \overline{D} & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C_3 & \overline{D} & C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & C_3 & \overline{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-3} \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} Q_0^{\rm p} \\ \vdots \\ Q_{N-1}^{\rm p} \end{pmatrix} \Delta t + \begin{pmatrix} Q_0^{\rm s} \\ \vdots \\ Q_{N-1}^{\rm s} \end{pmatrix} \Delta t\,,$$

где для краткости записи $D = 1 - C_2 - C_\tau$, $\overline{D} = 1 + C_2 + C_\tau$.

Решение уравнения (3) имеет вид: $f^{j+1} = \widehat{\mathbf{A}}^{-1}\left(\widehat{\mathbf{B}} f^{j} + (Q^{\rm p} + Q^{\rm s})\Delta t\right)$. На границах расчетного интервала энергий применяются условия непрерывной экстраполяции функции распределения в фиктивные узлы (ghost-points). Это позволяет сохранить единый вид разностной схемы для всех уравнений системы. В качестве начального условия полагаем $f\left(E_p, t = 0\right) = 0$.

Таким образом, для поиска численного решения уравнения приходим к нахождению коэффициентов двух матриц $\widehat{\mathbf{A}}$ и $\widehat{\mathbf{B}}$ и необходимому обращению матрицы $\widehat{\mathbf{A}}$.

Численная схема была верифицирована с использованием полученных аналитически решений уравнения переноса в случае толстой мишени и непрерывной инжекции частиц (см. рис. 1). Для такой инжекции характерен приход спектра в так называемый режим насыщения, при котором достигается баланс между инжекцией и потерями энергии; форма спектра после выхода в режим насыщения не изменяется.

Вклад от процессов регенерации протонов доходит до ≈7% для показателя $\alpha = 3$.

Для численного моделирования эволюции протонов при рассмотрении сценария с удержанием частиц в магнитной ловушке в модели «leaky box» следует решить два уравнения. Первое — для корональной части с учётом характерного времени удержания $\tau_{\rm esc}$, решением которого будет некоторая $f_{\rm c}\left(E_p, t\right)$, и второе — для фотосферы или более плотного слоя, где в качестве функции инжекции будет выступать полученное решение в короне $Q^{\rm p}\left(E_p, t\right) \to f_{\rm c}\left(E_p, t\right)/\tau_{\rm esc}(E_p)$ [Kocharov et al., 2000].

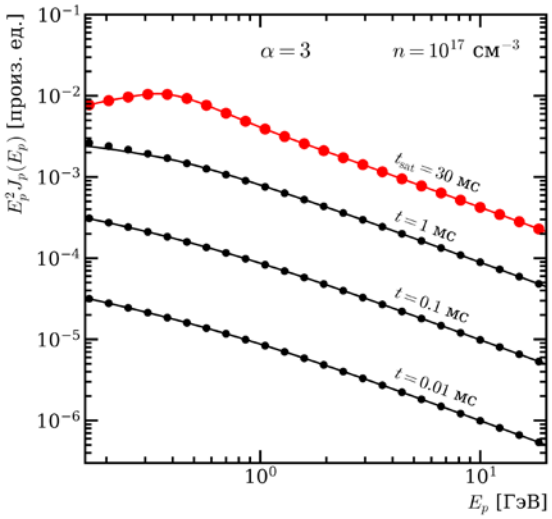

Рис. 1. Эволюция спектра протонов $J_p\left(E_p, t\right) \propto f\left(E_p, t\right) v\left(E_p\right)$, полученных аналитически в приближении непрерывных потерь энергии (сплошные кривые) и численно по представленной схеме (сплошные кружки), для случая непрерывной инжекции частиц с $Q^{\rm p}\left(E_p\right) \propto E_p^{-3}$. Момент достижения насыщения спектра показан красным цветом

РАСЧЁТ СПЕКТРОВ ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЯ

Расчёт спектров гамма-излучения проводится по формуле из [Kafexhiu, 2016]:

$$\Phi_\gamma\left(E_\gamma, t\right) = n \sum_{A,B} Y_p^A Y_t^B \int_{E_p^{\rm th}}^{\infty} \frac{{\rm d}\sigma_\gamma^{AB}}{{\rm d}E_\gamma}\left(E_p, E_\gamma\right) J\left(E_p, t\right) {\rm d}E_p\,,$$

где Y_p^A, Y_t^B – относительное по отношению к протонам содержание других ионов для налетающих частиц (ядра A) и частиц мишени (ядра B) соответственно, ${\rm d}\sigma_\gamma^{AB}/{\rm d}E_\gamma$ — дифференциальное сечение генерации гамма-излучения в реакциях типа $A + B \to \pi^0 \to 2\gamma$, $E_p^{\rm th}\left(A_p, A_t\right)$ — пороговая энергия такой реакции, $J\left(E_p, t\right)$ — спектр налетающих ионов. Дифференциальные сечения взяты из работы [Orusa et al., 2023].

Учёт состава налетающих частиц осуществляется в рамках так называемой модели

«суперпозиции», согласно которой налетающее ядро с массовым числом A трактуется как совокупность A свободных нуклонов, каждый из которых обладает той же энергией на нуклон, что и ускоренные протоны.

На рис. 2 показана эволюция рассчитанных спектров излучения по соответствующим спектрам протонов из рис. 1. Видно, что спектры до достижения режима насыщения самоподобны.

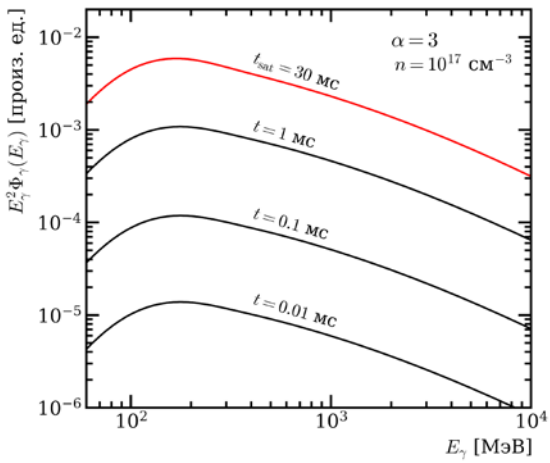

Рис. 2. Эволюция спектров гамма-излучения $\Phi_\gamma(E_\gamma)$, соответствующие полученным спектрам протонов (см. рис. 1). Спектр излучения в режиме насыщения показан красным цветом

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе выполнено численное моделирование эволюции спектров ускоренных в атмосфере Солнца протонов и связанного с ними высокоэнергетического гамма-излучения в рамках модели «leaky box» на основе решения нестационарного уравнения переноса частиц; представлена схема расчёта уравнения в матричной форме. В модели, помимо прочих процессов, учтено зависящее от энергии характерное время удержания частиц в корональных магнитных петлях, что может быть применено для интерпретации кривых блеска гамма-излучения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Asplund M., Amarsi A.M., Grevesse N. The chemical make-up of the Sun: A 2020 vision // Astron. Astrophys. 2021. V. 653. P. A141.

Barghouty A.F. A review of the Ginzburg-Syrovatskii's galactic cosmic-ray propagation model and its leaky-box limit // Tech. Rep. NASA/TP–2012–217464. 2012. P. 48.

Batista M., Covolan R.J.M. Leading particle effect, inelasticity, and the connection between average multiplicities in e^+e^- and *pp* processes // Phys. Rev. D. 1999. V. 59. P. 054006.

Cheng, C.-C. Theoretical studies of the flux and energy spectrum of gamma radiation from the Sun // Space Sci. Rev. 1972. V. 13. P. 3–123.

Forrest D.J., Vestrand W.T., Chupp E.L., Rieger E., Cooper J.F., Share G.H. Neutral pion production in solar flares // 19th Internat. Cosmic Ray Conf. (ICRC19). 1985. V. 4 P. 146.

Gaisser T.K. Cosmic Rays and Particle Physics. Cambridge University Press, 1990. 279 p.

Ginzburg V.L., Syrovatskii S.I. The origin of cosmic rays, 1964. Pergamon Press. 426 p.

Gould R.J. Energy loss of a relativistic ion in a plasma // Physica. 1972. V. 58. P. 379–383.

Kafexhiu E., Aharonian F. A., Taylor A. M., Vila G. S. Parametrization of gamma-ray production cross sections for pp interactions in a broad proton energy range from the kinematic threshold to PeV energies // Phys. Rev. D. 2014. V. 90, N 12. P. 19.

Kafexhiu E. Parametrization of the nucleus-nucleus γ-ray production cross sections below 100 GeV/nucleon: subthreshold pions and hard photons // Phys. Rev. C. 2016. V. 94, N 6. P. 064603.

Kimel' L.R., Mokhov N.V. Distribution of particles in the range 10^{-2}–10^{12} eV, initiated in dense media by high-energy adrons // Sov. Phys. J. 1974. V. 17. P. 1349–1354.

Kocharov L., Kovaltsov G. A., Torsti J. Trapping and precipitation of protons during stochastic acceleration in magnetic loops // Astrophys. J. 2000. V. 543, N 1. P. 438–446.

Mandzhavidze N., Ramaty R. Gamma rays from pion decay: evidence for long-term trapping of particles in solar flares // Astrophys. J. Lett. 1992. V. 396. P. L111.

Murphy R.J., Dermer C.D., Ramaty R. High-energy processes in solar flares // Astrophys. J. Suppl. Ser. 1987. V. 63. P. 721.

Navas S., Amsler C., Gutsche T., Hanhart C. et al. Review of particle physics // Phys. Rev. D. 2024. V. 110. P. 030001.

Orusa L., Di Mauro M., Donato F., Korsmeier M. New determination of the production cross section for γ rays in the Galaxy // Phys. Rev. D. 2023. V. 107. P. 083031.

Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B. P. Numerical recipes in C: the art of scientific computing. Cambridge University Press, 1992. 994 p.

Ryan J.M., Lee M.A. On the transport and acceleration of solar flare particles in a coronal loop // Astrophys. J. 1991. V. 368. P. 316.

Tripathi R.K., Cucinotta F.A., Wilson J.W. Universal parameterization of absorption cross sections // Tech. Rep. NASA/TP–1999–209726. P. 04259.