*Секция А. Астрофизика и физика Солнца. БШФФ-2026. С. 21–25.*

УДК 524.834; 531.19+536.75
DOI: 10.62955/0135-3748-2026-21

# ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КВАНТОВЫХ ГАЗОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

**С.Э. Коренблит[1, 2], В.А. Наумов[2], Ю.Д. Акберов[1]**

[1]Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия, korenb@ic.isu.ru
[2] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

# THERMODYNAMIC FUNCTIONS OF QUANTUM GASES OF CHARGED PARTICLES

**S.E. Korenblit[1, 2], V.A. Naumov[1, 2], Yu.D. Akberov[1]**

[1]Physics Faculty of Irkutsk State University, Irkutsk, Russia, korenb@ic.isu.ru
[2]Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

**Аннотация.** Получены новые точные аналитические представления уравнений состояния идеальных релятивистских квантовых газов частиц и античастиц в состояниях их термодинамического равновесия с излучением или друг с другом, а также связи между этими представлениями для ферми- и бозе-статистик.

**Ключевые слова:** релятивистские заряженные квантовые газы, низко- и высокотемпературные разложения.

**Abstract.** New exact analytical representations have been obtained for the equations of state of ideal relativistic quantum gases of particles and antiparticles in thermodynamic equilibrium with radiation or with each other, as well as the relationships between these representations for Fermi-Dirac and Bose-Einstein statistics.

**Keywords:** relativistic charged quantum gases, low- and high- temperature decompositions.

## ВВЕДЕНИЕ

Точные термодинамические функции идеальных релятивистских квантовых газов и их разнообразные предельные выражения играют важную роль при расчетах различных астрофизических процессов, а также при исследовании свойств как горячего, так и холодного вещества в состояниях со сверхвысокой плотностью. Так, уравнения состояния электрон-позитронного и нейтринно-антинейтринного идеальных ферми-газов используются в теориях эволюции массивных звезд и белых карликов и в моделях космологического нуклеосинтеза. Как функции состояния кварк-антикварковой плазмы они определяют ранние стадии эволюции Вселенной в различных космологических моделях Большого взрыва, а также используются в моделях адронных мешков КХД. Скалярные поля, связанные с заряженными бозе-газами, фигурируют в моделях темной материи и квинтэссенции.

Изучение представлений для таких функций имеет давнюю историю, продолжающуюся и по сей день. Наиболее существенный шаг, на наш взгляд, сделан в работах Блинникова и др., [1988] где получены точные представления для функций состояния электрон-позитронного газа во всей области изменения их параметров независимо от степени их вырождения, особенно удобные в области высоких температур.

В данной работе первоначально тем же методом найдены новые точные представления функций состояния релятивистских идеальных квантовых газов частиц и античастиц для бозе- и ферми-статистики в состоянии их термодинамического равновесия с излучением или друг с другом и установлены связи между этими представлениями для различных статистик. Полученные здесь аналитические представления не зависят от степени вырождения и релятивизма, дают независимый универсальный аналитический способ своего вывода для обеих статистик и служат основой для асимптотических разложений как в области высоких, так и низких температур.

## ЗАСЕЛЕННОСТИ

Средние числа заполнения одночастичных состояний с энергией ε для идеальных газов отрицательно заряженных фермионов с η = +1, бозонов с η = −1 при температуре $T$, постоянной Больцмана $k$ и химическом потенциале μ имеют вид

$$n_T^{(\eta)}(\varepsilon-\mu)=\frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/(kT)}+\eta}, \qquad (1)$$

где принято, что $\mu \to \mu_-^{(\eta)},\ \mu_-^{(-1)} < \varepsilon_0,\ \mu_-^{(+1)} \gtrless \varepsilon_0$.

В пренебрежении их кулоновским взаимодействием между собой рассматриваемые частицы идеальных газов обладают только энергией покоя и кинетической энергией, зависящими вместе лишь от их импульса **p** как $\varepsilon=\varepsilon(p)=c\sqrt{p^2+(mc)^2}$, где $p=|p|$. Полное число состояний $\underline{\gamma}$ в объеме $V$ с энергией меньше ε, но выше ее порога $\varepsilon_0$ определяется зависящим от энергии импульсом $cp=cp(\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon_0^2}$ с $\varepsilon_0=mc^2$, массой $m$, скоростью света $c$, постоянной Планка $h=2\pi\hbar$ как

$$\underline{\gamma}(\varepsilon,V)=\frac{g_sV}{h^3}\frac{4\pi p^3(\varepsilon)}{3}=\frac{A_sV}{3}(\varepsilon^2-\varepsilon_0^2)^{3/2}, \qquad (2)$$

где для внутренней кратности вырождения

$$g\to g_s=2s+1: \qquad A_s=\frac{g_s4\pi}{(hc)^3}.$$

Энергия и импульс Ферми при $T$=0 таковы:

$$N_\mp^{(\eta)}=\underline{\gamma}(\varepsilon_F,V)=\frac{g_sV}{h^3}\frac{4\pi p_F^3}{3}, \qquad (3)$$

$$p_F\equiv p(\varepsilon_F)=h\left(\frac{3\,\underline{n}_\mp^{(\eta)}}{4\pi\,g_s}\right)^{1/3}, \qquad (4)$$

где концентрации частиц $\underline{n}_\mp$ равны

$$\underline{n}_{\mp}^{(\eta)} \equiv \underline{n}_{\mp}^{(\eta)}(T,\mu_{\mp}) = \frac{N_{\mp}^{(\eta)}}{V}.$$

Так как в состояниях термодинамического, в том числе химического равновесия газов релятивистских заряженных частиц за счет реакций их парного рождения и аннигиляции типа $Y\underline{Y} \rightleftharpoons X\underline{X}$ химические потенциалы античастиц равны по величине и противоположны по знаку химическим потенциалам частиц, поскольку $e^- + e^+ \rightleftharpoons N\gamma$ и $e^- + e^+ \rightleftharpoons \nu + \underline{\nu}$, то

$$\mu_+^{(\eta)} + \mu_-^{(\eta)} = \mu_\nu + \mu_{\underline{\nu}} = 0, \tag{5}$$

$$\mu_-^{(\eta)} = -\mu_+^{(\eta)} = \mu.$$

## УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ГАЗОВ

Большой термодинамический потенциал и давление определяется как

$$-J_{\pm}^{(\eta)}(T,V,\mu) = VP_{\pm}^{(\eta)}(T,\mu) = \tag{6}$$

$$= \int_{\varepsilon_0}^{\infty} d\varepsilon\, \overline{\gamma}(\varepsilon,V) n_T^{(\eta)}(\varepsilon-\mu),$$

Откуда полное давление

$$\Pi^{(\eta)}(T,\mu) = P_-^{(\eta)} + P_+^{(\eta)} = \tag{7}$$

$$= \int_{\varepsilon_0}^{\infty} d\varepsilon\, \overline{\gamma}(\varepsilon,V)[n_T^{(\eta)}(\varepsilon-\mu) + n_T^{(\eta)}(\varepsilon+\mu)].$$

Выражения для плотностей энтропии, заряда и энтальпии имеют вид

$$\sigma^{(\eta)}(T,\mu) = \frac{S_\eta}{V} = \left(\frac{\partial}{\partial T}\Pi^{(\eta)}(T,\mu)\right)_\mu, \tag{8}$$

$$\underline{Q}^{(\eta)}(T,\mu) = \frac{Q_\eta}{V} = \left(\frac{\partial}{\partial \mu}\Pi^{(\eta)}(T,\mu)\right)_T, \tag{9}$$

$$w^{(\eta)}(T,\mu) = \frac{W_\eta}{V} = T\sigma^{(\eta)} + \mu\underline{Q}^{(\eta)}. \tag{10}$$

Плотность заряда можно определить разностью концентраций частиц и античастиц:

$$\underline{Q}^{(\eta)}(T,\mu) \equiv \underline{n}_-^{(\eta)} - \underline{n}_+^{(\eta)} = \tag{11}$$

$$= \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{d\overline{\gamma}(\varepsilon,V)}{V}\left[n_T^{(\eta)}(\varepsilon-\mu) - n_T^{(\eta)}(\varepsilon+\mu)\right].$$

Для вырожденного случая, при $|\mu| > \varepsilon_0 > 0$, одно из средних чисел заполнения Бозе газа $n_{T=0}^{(-1)}(\epsilon)$ в (7), (11) обязательно имеет особенность при $\epsilon = \varepsilon - |\mu| = 0$, при переходе через которую оно меняет знак. Однако, поскольку определенной в равновесном состоянии физической величиной с определенной зарядовой четностью является именно разность концентраций (11), которая не имеет фиксированного знака, такое изменение знака у одного из членов подынтегрального выражения не лишает смысла весь интеграл, который существует в смысле главного значения и воспроизводит приближение Вайнберга [Вайнберг, 2008] для плотности заряда (11) $\underline{Q}^{(\eta)}(T,\mu)$.

## ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ СОСТОЯНИЯ

Наши представления допускают две полностью эквивалентных формулировки — как отчасти известную высокотемпературную, так и новую низкотемпературную и являются прямым, хотя и нетривиальным обобщением ферми-представления из работ [Блинников, Рудзский, 1988]. В наших представлениях также используется дигамма-функция $\psi(z)$ [Бейтмен, Эрдейи, 1953], но от более общих аргументов, при

$$w = w(x) = \phi + \beta x = \beta(b+x),$$

$$\eta = \pm 1;\ \ 1 - \delta_{\eta,1} \equiv \delta_{-\eta,1} \equiv \frac{(1-\eta)}{2}, \tag{12}$$

$$z = 0 \pm \frac{iw}{2\pi};\ \ \beta = \frac{m}{kT};\ \ \phi = \frac{\mu}{kT};\ b = \frac{\phi}{\beta} = \frac{\mu}{m}. \tag{13}$$

Мы имеем: $\frac{1}{0+iw} + \frac{1}{0-iw} = 2\pi\delta(w)$ и, вводя

$$\Psi_{(\eta)}(w) = \psi\left(1 - \frac{\delta_{\eta,1}}{2} + \frac{iw}{2\pi}\right) + \psi\left(1 - \frac{\delta_{\eta,1}}{2} - \frac{iw}{2\pi}\right), \tag{14}$$

$$\text{то есть}\ \ \Psi_{(\eta)}(w) \equiv ln\, ln\left(\frac{w}{2\pi}\right)^2 + \delta_{-\eta,1}\, 2\pi^2\delta(w) + 2\eta\, \Phi^{(\eta)}(w), \tag{15}$$

$$\Phi^{(\eta)}\big(w(x)\big) = \text{v.p.}\int_0^\infty \frac{dt\, 2t}{(e^t+\eta)(t^2-w^2(x))} = \text{v.p.}\int_0^\infty \frac{d\tau\, 2\tau}{(e^{\beta\tau}+\eta)(\tau^2-(x+b)^2)}, \tag{16}$$

найдем представления для $\Pi^{(\eta)}(\beta,\phi)$ (7) как четной функции μ:

$$\Pi^{(\eta)}(\beta,\phi) = \frac{A_s}{3}\left\{\frac{m^4}{\beta^4}\left[\left(8-\delta_{\eta,1}\right)\frac{\pi^4}{60} + \left(2-\delta_{\eta,1}\right)\frac{\pi^2\phi^2}{2} + \frac{\eta\phi^4}{4}\right] - \frac{m^4}{4\beta^2}\left(\left(2-\delta_{\eta,1}\right)\pi^2 + \eta 3\phi^2\right) + \delta_{-\eta,1}\theta(\beta^2-\phi^2)\frac{\pi m^4}{\beta^4}(\beta^2-\phi^2)^{3/2} + \frac{\eta 3m^4}{8}\left(ln\frac{4\pi}{\beta} + \frac{3}{4}\right) + \frac{\eta m^4}{2\pi}\int_{-1}^{1} dx\,(1-x^2)^{3/2}\Psi_{(\eta)}\big(w(x)\big)\right\}, \tag{17}$$

$$\Pi^{(\eta)}(\beta,\phi) = \frac{A_s}{3}\left\{\frac{m^4}{\beta^4}\left[\left(8-\delta_{\eta,1}\right)\frac{\pi^4}{60} + \left(2-\delta_{\eta,1}\right)\frac{\pi^2}{2}\phi^2\right] - \left(2-\delta_{\eta,1}\right)\frac{m^4\pi^2}{4\beta^2} + m^4\eta\theta(\phi^2-\beta^2)\left[\frac{3}{8}ln\left|b+(b^2-1)^{1/2}\right| - \frac{3}{8}b(b^2-1)^{1/2} + \frac{b}{4}(b^2-1)^{3/2}\right] + \frac{m^4}{\pi}\int_{-1}^{1} dx\,(1-x^2)^{3/2}\Phi^{(\eta)}\big(w(x)\big)\right\} \equiv \Pi^{(\eta)}(\beta,-\phi). \tag{18}$$

Эти представления можно получить путем прямого преобразования (17) в (18), а затем в исходное выражение (7) с учетом явного вида интеграла (16).

Первые — высокотемпературные представления (17) для η = 1 воспроизводят результат работы [Блинников, Рудзский, 1988]. Величина в первых квадратных скобках в (17) дает выражение для полного давления в ультрарелятивистском пределе $m = 0$. Вторые квадратные скобки в (18) описывают давление абсолютно вырожденного газа при $T = 0$.

Другие термодинамические функцию можно получить теперь из (8), (9), (10) путем дифференцирования давления (17), (18) как

$$T\sigma^{(\eta)}(T,\mu) = \frac{A_s}{3}\Big\{\Big[\big(8-\delta_{\eta,1}\big)\frac{\pi^4}{15}(kT)^4 + (kT)^2\pi^2\mu^2\big(2-\delta_{\eta,1}\big)\Big] - \big(2-\delta_{\eta,1}\big)\frac{(kT)^2}{2}\pi^2 m^2 + \delta_{-\eta,1}\theta(m-|\mu|)\pi kT(m^2-\mu^2)^{3/2} + \eta\frac{3m^4}{8} + \frac{\eta m^4}{2\pi}\int_{-1}^{1}\big[4(1-x^2)^{3/2} - 3(1-x^2)^{1/2} - 3bx(1-x^2)^{1/2}\big]\Psi^{(\eta)}\big(w(x)\big)dx\Big\}, \quad (19)$$

$$\mu\bar{Q}^{(\eta)}(T,\mu) = \frac{A_s}{3}\Big\{\Big[\big(2-\delta_{\eta,1}\big)\pi^2(kT)^2\mu^2 + \eta\mu^4\Big] - \eta\frac{3}{2}\mu^2 m^2 - 3\mu^2 m^2\delta_{-\eta,1}\theta(m-|\mu|)\pi kT(m^2-\mu^2)^{1/2} + \eta\frac{\mu m^3}{2\pi}\int_{-1}^{1}dx\,3\,x(1-x^2)^{1/2}\Psi_{(\eta)}\big(w(x)\big)\Big\}, \quad (20)$$

$$w^{(\eta)}(\beta,\phi) = \frac{A_s}{3}m^4\Big\{\frac{1}{\beta^4}\Big[\big(8-\delta_{\eta,1}\big)\frac{\pi^4}{15} + \big(2-\delta_{\eta,1}\big)2\pi^2\phi^2\Big] - \big(2-\delta_{\eta,1}\big)\frac{\pi^2}{2\beta^2} + \eta\theta(\phi^2-\beta^2)b(b^2-1)^{3/2} + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}dx\big[4(1-x^2)^{3/2} - 3(1-x^2)^{1/2}\big]\times\Phi^{(\eta)}\big(w(x)\big)\Big\}. \quad (21)$$

## УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Для вещественных $y$ определим вещественные функции со свойствами:

$$\mathcal{F}_\lambda^{(\eta)}(y) = \mathrm{v.p}\int_0^\infty \frac{x^\lambda}{e^{x-y+\eta}}; \quad (22)$$

$$\frac{dF_\lambda^{(\eta)}}{dy}\lambda F_{\lambda-1}^{(\eta)} = \lambda F_{\lambda-1}^{(\eta)}, \quad (23)$$

$$F_0^{(\eta)}(y) = \eta ln|1+\eta e^y|, \qquad \eta^2 = 1. \quad (24)$$

$$F_0^{(\eta)}(y) - F_0^{(\eta)}(-y) = \eta\, ln|\eta e^y| = \eta y = \frac{d}{dy}\Big(F_1^{(\eta)}(y) + F_1^{(\eta)}(-y)\Big), \quad (25)$$

$$F_1^{(\eta)}(y) + F_1^{(\eta)}(-y) = 2F_1^{(\eta)}(0) + \frac{\eta}{2}y^2,$$

$$F_2^{(\eta)}(y) - F_2^{(\eta)}(-y) = 4F_1^{(\eta)}(0) + \frac{\eta}{3}y^3, F_3^{(\eta)}(y) + F_3^{(\eta)}(-y) = 2F_3^{(\eta)}(0) + 6F_1^{(\eta)}(0) + \frac{\eta}{3}y^4, \quad (26)$$

$$F_\lambda^{(\eta)}(0) = \big(1-\delta_{\eta,1}2^\lambda\big)\Gamma(\lambda+1)\zeta(\lambda+1),$$

где $\zeta(\lambda+1)$ — дзета функция Римана.

С учетом определения (6), (7) а также свойств (22)–(26) для большого термодинамического потенциала $J_\eta$ имеем

$$-J_\eta(T,V,\mu) = V\Pi^{(\eta)} = V\left(P_{e^-}^{(\eta)} + P_{e^+}^{(\eta)}\right) = \frac{1}{3}U_\eta = \frac{1}{3}\left(U_{e^-}^{(\eta)} + U_{e^+}^{(\eta)}\right) = \frac{A_s V}{3}(kT)^4\left(2F_3^{(\eta)}(0) + 6F_1^{(\eta)}(0)\phi^2 + \frac{\eta\phi^4}{3}\right). \quad (27)\ (28)$$

Другие термодинамические функции —плотность заряда и энтропии получим согласно определениям (8), (9): (29)

$$T\sigma^{(\eta)}(T,\mu) = \frac{4A_s}{3}(kT)^4\left(2F_3^{(\eta)}(0) + 3F_1^{(\eta)}(0)\phi^2\right) > 0,$$

$$Q_\eta = A_s V\left(4F_1^{(\eta)}(0)\phi + \frac{\eta}{3}\phi^3\right),$$

что совпадает с приведенными выше результатами (17) при $m$=0. Первый порядок по φ в (29) дает результат Вайнберга [Вайнберг, 2008] для обеих статистик.

### Низкотемпературное разложение

Представления (18) позволяют получить низкотемпературные асимптотические разложения для $T \to 0$, $kT < m < \mu$, или $m < kT < \mu$, в виде

$$\Pi^{(\eta)}(T,\mu;m) \sim \frac{A_s}{3}\theta(\mu-m)\big(\eta+\widehat{D}\big)\int_m^\mu(\varepsilon^2-m^2)^{3/2}d\varepsilon, \quad (30)$$

$$\widehat{D} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\delta_{\eta,1}}{2^{2n-1}}\right)\zeta(2n)(kT)^{2n}\left(\frac{d}{d\mu}\right)^{2n},$$

хорошо известные [Квасников, 2002] только для вырожденного случая ферми-статистики при $\eta = 1$, как разложение только первого члена в (7) и аналогично в (11), поскольку второй член в (7) дает

здесь экспоненциально малый вклад. Для случаев $kT < \mu < m$ и $\mu < kT < m$ и первый член в (7), (11) также будет экспоненциально малым.

Полученные асимптотические разложения обрываются при $m = 0$ и совпадают с точным выражением для ультрарелятивистского предела (27) для газа заряженных частиц в целом.

## ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Высокотемпературные разложения получаются из представления (17) и имеют место для случаев $0 < \mu < m < kT$ и $m < \mu < kT$ в виде

$$\frac{\eta}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{3/2}\Psi_{(\eta)}\big(w(x)\big)dx = I_{(\eta)}(\beta,\varphi) = -\eta\frac{3}{8}\big(\gamma_э + \delta_{\eta,1}2\ln 2\big) + \frac{3}{8}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \times \big(\overline{\phi}\big)^{2r}\zeta(2r+1)\big[1-\delta_{\eta,1}2^{2r+1}\big]Y_r(z), \quad (31)$$

где справедливо соотношение

$$(-1)^r\left(\underline{\phi}\right)^{2r}\zeta(2r+1)\big[1-\delta_{\eta,1}2^{2r+1}\big]Y_r(z) = (-1)^r\left(\underline{\beta}\right)^{2r}\zeta(2r+1)\big[1-\delta_{\eta,1}2^{2r+1}\big]Y_r(b), \quad (32)$$

$$\text{для } \underline{\phi} = \frac{\phi}{2\pi},\ \underline{\beta} = \frac{\beta}{2\pi},\ z = \frac{m}{\mu} = \frac{\beta}{\phi} = \frac{1}{b},$$

$$Y_r(z) = \sum_{k=0}^{r}\frac{2(z/2)^{2n}(2r)!}{(2r-2k)!k!(k+2)!}, \quad (33)$$

$$Y_r(b) = b^{2r}Y_r\left(\frac{1}{b}\right). \quad (34)$$

Тогда как для $\Xi = (\phi+\beta)/2\pi = \underline{\phi} + \underline{\beta}$, полагая

$$\underline{Y}_r(z) = \frac{Y_r(z)}{(1+z)^{2r}} = \frac{Y_r(b)}{(1+b)^{2r}} = \underline{Y}_r(b), \quad (35)$$

получим интеграл (31) в виде разложения по $\Xi$: (36)

$$I_{(\eta)}(\Xi,z) = -\eta\frac{3}{8}\big(\gamma_э + \delta_{\eta,1}2\ln 2\big) + \frac{3}{8}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \times \Xi^{2r}\zeta(2r+1)\big[1-\delta_{\eta,1}2^{2r+1}\big]\overline{Y}_r(z).$$

Для плотностей энтропии, заряда и энтальпии в области $m + |\mu| \le 2\pi kT$ или $0 < \Xi \le 1$ получаем следующие высокотемпературные разложения:

$$T\sigma^{(\eta)}(T,\mu) = \frac{A_s}{3}\Big\{\Big[\big(8-\delta_{n,1}\big)\frac{\pi^4}{15}(kT)^4 + \big(2-\delta_{n,1}\big)\pi^2\mu^2(kT)^2\Big] - \big(2-\delta_{n,1}\big)m^2\frac{\pi^2}{2}(kT)^2 + \delta_{n,1}\theta(m-|\mu|)\pi kT(m^2-\mu^2)^{3/2} + \frac{3}{8}m^4 - \frac{3}{8}m^4\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \times \big(\bar{\beta}\big)^{2r}\zeta(2r+1)\big[1-\delta_{n,1}2^{2r+1}\big]2r\Upsilon_r(b)\Big\}, \quad (37)$$

$$\mu\bar{Q}^{(\eta)}(T,\mu) = \frac{A_s}{3}\Big[\big(2-\delta_{\eta,1}\big)\pi^2(kT)^2\mu^2 + \eta\mu^4 - \eta\frac{3}{2}m^2\mu^2 - \delta_{-\eta,1}\theta(m-|\mu|)3\pi kT\mu^2\sqrt{m^2-\mu^2} + \frac{3}{8}m^4\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \times \big(\bar{\beta}\big)^{2r}\zeta(2r+1)\big(1-\delta_{\eta,1}2^{2r+1}\big)b\frac{\partial}{\partial b}\Upsilon_r(b)\Big], \quad (38)$$

$$w^{(\eta)}(T,\mu) = \frac{A_s}{3}\Bigg[\big(8-\delta_{\eta,1}\big)\frac{\pi^4}{15}(kT)^4 + \big(2-\delta_{\eta,1}\big)2\pi^2\mu^2(kT)^2 + \eta\mu^4 - m^2\left(\big(2-\delta_{\eta,1}\big)\frac{\pi^2}{2}(kT)^2 + \eta\frac{3}{2}\mu^2\right) + \delta_{-\eta,1}\theta(m-|\mu|)kT\sqrt{m^2-\mu^2}(m^2-4\mu^2) + \eta\frac{3}{8}m^4 - \frac{3}{8}m^4\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \times \big(\overline{\phi}\big)^{2r}\zeta(2r+1)\big(1-\delta_{\eta,1}2^{2r+1}\big)z\frac{\partial}{\partial z}Y_r(z)\Bigg]. \quad (39)$$

Для $\underline{Y}_r(z)$ получаем оценку $\underline{Y}_r(z) \sim \underline{Y}_r^{as}(z)$, где

$$\underline{Y}_r^{as}(z) \simeq \begin{cases}\frac{(1+z)^{5/2}}{(zr)^{5/2}\sqrt{\pi}} & z > 0,\ r \to \infty,\\ \frac{2^{5/2}}{r^{5/2}\sqrt{\pi}} & z = 1,\ r \to \infty,\\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} & z = 0,\ \forall r.\end{cases} \quad (40)$$

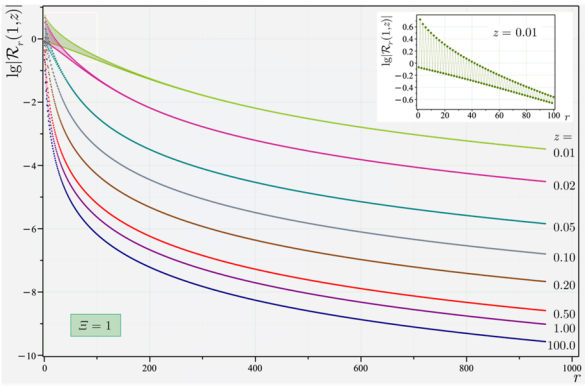


*Рис. 1.* Скорость сходимости ряда Лейбница (36) для бозонного случая при Ξ=1, показанная как десятичный логарифм относительной ошибки $R_r(1,z)$ в зависимости от $r$ для различных $z$. Относительная ошибка определяется как $\mathcal{R}_r(\Xi,z) = B_{r+1}(\Xi,z)\,[\sum_1^r B_k(\Xi,z)\,]^{-1}$ где $B_r(\Xi,z) = (-1)^r\,\Xi^{2r}\,\zeta(2r+1)\underline{Y}_r(z)$, а остаток $R_r$ самого ряда (36) удовлетворяет условию $|R_r| \le |B_{r+1}|$. Скорость сходимости ряда (36) резко увеличивается при $0<\Xi<1$, но замедляется при $\Xi \to 1$, особенно для малых $z$. На вставке показана увеличенная область изменения значений $r \le 100$ для $z = 0.01$, где еще заметно знакочередование ряда.

Таким образом, для фермионов радиус сходимости по $\Xi = \underline{\phi} + \underline{\beta}$ вдвое меньше, чем для бозонов. В любом случае остаток ряда Лейбница (36) не превышает по абсолютной величине ($r$+1)-го члена.

Сходимость же на границе $\Xi = 1$ для $z > 0, b > 0$ обеспечивается поведением (40) $\sim r^{-5/2}$ при $r \to \infty$ (рис. 1), гарантируя ее также для первых производных $\sigma^{(\eta)}, \underline{Q}^{(\eta)}, w^{(\eta)}$. Эта сходимость исчезает при $z = 0$, когда $m = 0$, где, однако, имеют место точные решения (27)–(29) для ультрарелятивистского случая. Таким образом, поведение этой суммы вблизи точки $m = 0$ становится нерегулярным (рис. 2).

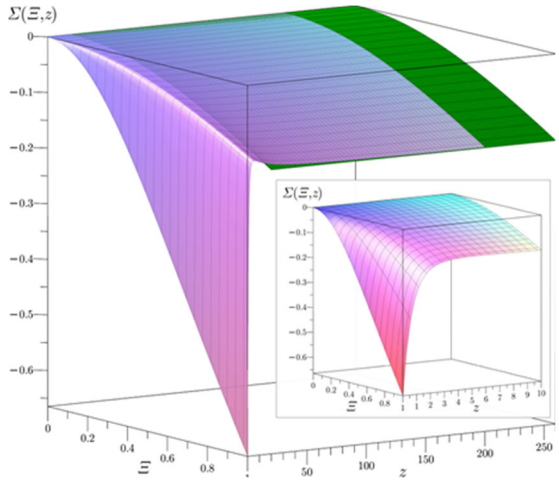


*Рис. 2.* Поверхность функции $\sum(\Xi, z) = \sum_{r=1}^{\infty} B_r(\Xi, z)$ как вклада в интеграл (36) для бозонного случая и ее приблизительное поведение при замене $\underline{Y}_r(z) \to \underline{Y}_r{}^{as}(z)$, согласно (40), в слагаемых $B_r(\Xi, z)$, определенных в подписи к рис. 1

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше мы представили новую серию представлений, полученных универсальным методом для функций состояния релятивистских идеальных квантовых газов частиц и античастиц, подчиняющихся статистикам Ферми и Бозе, находящихся в термодинамическом равновесии с излучением или друг с другом, и установили тесные взаимосвязи между ними.

Мы обнаружили конечный радиус сходимости высокотемпературного разложения (31) по переменной $\Xi = \underline{\phi} + \underline{\beta} < 1$ для бозонного случая; для случая ферми-статистики этот радиус оказывается вдвое меньше.

Отметим, что частицы обоих знаков заряда — как в бозон-антибозонном газе, так и в электрон-позитронном ферми-газе — представляют собой возбуждения одних и тех же вторично квантованных заряженных скалярных или, соответственно, спинорных полей.

Это означает, что термодинамическое равновесие идеального газа заряженных релятивистских частиц предполагает обязательное наличие частиц с зарядами обоих знаков — хотя бы в экспоненциально малых относительных количествах.

В то же время для этих полей хорошо известно, что локальная плотность распределения заряда как нулевая компонента соответствующего локально сохраняющегося (электрического) тока вместе со средней плотностью заряда $\underline{Q}^{(\eta)}(T, \mu)$ не являются положительно определенными величинами.

Использование главного значения означает для интеграла в (7), (11) исключение исчезающе малой окрестности точки $\epsilon = \varepsilon - |\mu| = 0$. В отличие от нейтральных нерелятивистских бозонов, здесь число антибозонов, «конденсирующихся» таким образом, в принципе не фиксировано. Поэтому вместо того, чтобы уходить в конденсат, где они физически оставались бы как вклад в фиксированное полное число нейтральных частиц, здесь они просто аннигилируют с бозонами. Их исчезновение приводит к формально отрицательному значению соответствующих средних чисел заполнения, демонстрируя лишь более узкую область возможной одночастичной интерпретации для заряженных бозонных квантованных полей по сравнению с фермионными полями, для которых средние числа заполнения одночастичных состояний одновременно имеют смысл вероятности их заполнения и, в отличие от бозонных, должны быть положительными. Таким образом, релятивистский заряженный бозе-газ существенно отличается от нейтрального нерелятивистского бозе-газа.

Используемая здесь процедура главного значения сама по себе не исключает бозе-конденсацию, поскольку для $m > 0$ только одна из заряженных компонент в (11) может подвергаться конденсации, при которой для последней подразумевается предел $|\mu| - m \to -0$, а ее конденсат фактически вводится «вручную» лишь в уравнение (11) как его реинтерпретация при $\eta = -1$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1, Т. 2. New York: McGraw-Hill, 1953.

Блинников С.И., Рудзский М.А. Новые представления термодинамических функций ферми-газов // Astrophys. 1988. Т. 29. С. 644–651.

Вайнберг С. Космология. New York: Oxford University Press Inc., 2008.

Квасников И.А. Термодинамика и статистическая физика. Т. 2: Теория равновесных систем. М., 2002.