Общее выражение для корреляционных кривых SRH

Уралов А.М., Лесовой С.В.

April 2021

1 Introduction

Отклик радиогелиографа представляет собой комбинацию N пар откликов параболических антенн. $N = n(n-1)/2$, если используются n антенн. Облучатель каждой антенны является преобразователем в электрический ток или напряжение V индукции электрического поля E собранной зеркалом антенны электромагнитной волны. Эти величины пропорциональны друг другу, но, опуская коэффициенты такого преобразования, будем ставить между ними знак равенства. Для i-й пары идентичных антенн 1 и 2 и плоском фронте однородной по интенсивности падающей на обе антенны волны $V_1 = Ecos(\omega t)$, $V_2 = Ecos(\omega t + \varphi)$, где φ – набег фаз, равный в случае точечного источника $\varphi = 2\pi Bsin\theta_0/\lambda$. Здесь B – расстояние между антеннами (база), $\theta_0 = \theta_0(t)$ – зенитный угол. Прямое сложение сигналов V_1 и V_2 даст результирующее электрическое поле, квадрат которого имеет смысл мгновенной плотности энергии. Последующее усреднение по времени даст представление об отклике двухэлементного интерферометра на поток падающего излучения.

$$\left\langle (V_1 + V_2)^2 \right\rangle = \left\langle V_1^2 \right\rangle + \left\langle V_2^2 \right\rangle + 2\left\langle V_1 V_2 \right\rangle = E^2/2 + E^2/2 + E^2 cos\varphi. \tag{1}$$

Первое и второе слагаемые пропорциональны потокам излучения, собираемого каждой из антенн. Третье слагаемое $\langle V_1 V_2 \rangle$ – среднее по времени от скалярного произведения – характеризует корреляцию сигналов антенн и является предметом интереса. Это слагаемое содержит, хотя и весьма неполную, информацию о положении источника и в случае протяжённого источника определяет видность квазипериодической последовательности лепестков диаграммы направленности антенной пары.

Протяженный источник рассматривается как мозаика из малых – "точечныхлементов с индексом j. Выражение для набега фазы на i-й паре антенн от каждого такого элемента перепишем в виде $\varphi = 2\pi Bsin(\theta_0 + \Delta\theta)/\lambda = (2\pi B/\lambda)\,(sin\theta_0 cos\Delta\theta + cos\theta_0 sin\Delta\theta)$. Здесь B - расстояние между антеннами (база), $\theta_0 = \theta_0(t)$ [радиан] зенитное расстояние центра (или точки близкой к центру "тяжести") движущегося по небу протяженного радиоисточника, $\Delta\theta$ – угловое расстояние элемента мозаики от центра радиоисточника. Вводя обозначения $\varphi_0 = 2\pi B sin\theta_0/\lambda$, $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ и используя разложение по $\Delta\theta \ll 1$ с точностью до членов второго порядка малости найдём: $\Delta\varphi = (2\pi B cos\theta_0/\lambda)\Delta\theta$. Произведение $Bcos\theta_0$ – база антенной пары, видимая из фазового центра радиоисточника. Это выражение всего с одним направляющим углом соответствует расположению вектора базы и условно выбранного (фазового) центра источника в одной плоскости. В трёхмерном случае – $\Delta\varphi = \left(\overrightarrow{2\pi(u,v)}\overrightarrow{(l,m)}\right) = \left(\overrightarrow{\kappa}\overrightarrow{\Delta\theta}\right)$, $\kappa = 2\pi\sqrt{u^2+v^2}$, где l, m – направляющие косинусы, $u\lambda$ и $v\lambda$ – проекции видимой со стороны источника антенной базы на ортогональные оси, совпадающие в нашем случае с направлениями плеч СРГ. (См.примечание *).

В случае протяженного источника при выводе выражения типа 1 вместо $\left\langle (V_1+V_2)^2 \right\rangle$ для каждой i-й пары антенн следует писать $\left\langle \left(\sum_j V_1^j + \sum_j V_2^j\right)^2 \right\rangle$, где индекс j относится к j-му элементу протяженного источника. Так как все элементарные источники предполагаются некогерентными, то отличными от нуля будут только члены вида $\left\langle V_*^j V_*^j \right\rangle$, где $*$ – 1 или 2 (см. примечание **). В противном случае задача синтеза нерешаема. При выполнении этого условия для i-й пары антенн

$$\mathbf{V}_{cos} = \langle V_1 V_2 \rangle = \frac{1}{2}\sum_j E_j^2 cos\Delta\varphi_i = A\int_\Omega I(\Omega)\cos(\overrightarrow{\kappa_i}\overrightarrow{\Delta\theta})d\Omega. \qquad (2)$$

Интенсивность падающего излучения $I(\Omega)$ $[/(^2\cdot\cdot)]$ для одной моды круговой поляризации равна $\frac{k}{\lambda^2}T_b(\Omega)\,D(\Omega)$. Здесь $T_b(\Omega)$ - соответствующеее данной моде угловое распределение яркостной температуры по источнику. $D(\Omega)$ - диаграмма направленности одиночной антенны по мощности (*Полагается, что антенна сопровождает источник при его движении по небу*). k - постоянная Больцмана. Множитель $A = s_{ant}\cdot\Delta t\cdot\Delta\omega/2\pi$ призван отразить факт реагирования приёмной системы на полный поток излучения принятый одиночной антенной площадью s_{ant} в полосе частот $\Delta\omega/2\pi$ за время интегрирования Δt (см. примечание ***).

Выражение (2) представляет собой амплитуду – видность $\mathbf{V}_{cos}$ – пространственной гармоники $\cos(\kappa_i\Delta\theta)$ в Фурье-разложении углового распределения яркости протяжённого источника $T_b(\Omega)$. Для синтеза изображения методом Фурье помимо набора чётных, необходим набор нечётных гармоник $\sin(\kappa_i\Delta\theta)$. Эти гармоники можно получить изменением фазы сигнала одной из антенн 1 и 2 на $\pi/2$. Подобную процедуру выполняет цифровой приемник, применяя преобразование Гильберта к исходному сигналу. Таким образом формируются, так называемые аналитические сигналы от всех антенн, комплексня корреляция которых содержит четную и нечетную часть видности $\mathbf{V}_{sin}$ (замена в (2) cos на sin). В используемом формализме комплексных величин комплексная функция видности одной антенной пары на выходе из коррелятора есть: $\mathbf{V}_{corr} =< (V_1 V_2^*) >= \mathbf{V}_{cos} + i\mathbf{V}_{sin}$. Корреляционные кривые СРГ - $\mathbf{Corr}(t)$ - получены суммированием в последовательные моменты времени модулей $\mathbf{V}_{corr}$ от всех комбинаций используемых антенных пар - $\mathbf{Corr} = \sum_i^N |\mathbf{V}_{corr_i}|$. Как следует из (2), $\mathbf{V}_{corr}$ линейным образом зависит от распределения $T_b(\Omega)$. Поэтому $\mathbf{V}_{corr}$ можно представить как сумму раздельных откликов на диск спокойного Солнца $T_b^{Sun}(\Omega)$ и на радиоисточники $T_b^{Source}(\Omega)$ на этом диске, где $T_b^{Source}(\Omega)$ - яркостная температура в источнике над уровнем $T_b^{Sun}(\Omega)$. При этом $\mathbf{V}_{corr}$ через соотношение $\mathbf{V}_{cos}$ и $\mathbf{V}_{sin}$ зависит от расположения источников на солнечном диске. В свою очередь модуль функции видности, $|\mathbf{V}_{corr_i}|$, не зависит от расположения источников. Более того, каждый радиоисточник можно представить как однородный по яркостной температуре диск или набор малых однородных дисков. Поэтому при вычислении $\mathbf{Corr}$ в рамках модели спокойного Солнца с модельным источником (источниками), можно воспользоваться суммированием интегралов (1) для всех модельных дисков так, как если бы их центры находились в едином фазовом центре, например, центре Солнца. В этом случае $\mathbf{V}_{sin} = 0$, $\mathbf{V}_{corr} = \mathbf{V}_{cos}$ и $\mathbf{Corr} = \sum_i^N |\mathbf{V}_{cos}|$.

2 Correlation plots

Выражение (2) для расчёта $\mathbf{V}_{cos}$ в одной поляризации и для i-й пары антенн выглядит так:

$$\mathbf{V}_{cos} = A\frac{k}{\lambda^2}\int_\Omega T_b(\Omega)\, D(\Omega) \times \cos(\overrightarrow{\kappa_i}\overrightarrow{\theta})d\Omega. \tag{3}$$

Здесь мы вернулись к использованию θ переобозначив $\Delta\theta$ в (2). Подменив радиоисточник однородным по яркости, $T_b(\Omega) = T_b$, диском радиуса θ_s, полагая диаграмму $D(\Omega)$ главного лепестка достаточно широкой, чтобы ею пренебречь, $D(\Omega) \approx 1$, вместо (3) получим:

$$\mathbf{V}_{cos} = A\frac{kT_b}{\lambda^2}2\int_0^{\theta_s} 2\sqrt{{\theta_s}^2 - \theta^2}cos(\kappa_i\theta)d\theta = A\frac{kT_b}{\lambda^2}4{\theta_s}^2\int_0^1 \sqrt{1-y^2}cos(\kappa_i\theta_s y)dy. \tag{4}$$

Подставляя выражение для табличного интеграла (Градштейн, Рыжик, 1971, стр.433) и вводя спектральную плотность потока одной поляризационной моды $F = \dfrac{kT_b}{\lambda^2}\Omega_s$ [/(^{2} ·)], где $\Omega_s = \pi{\theta_s}^2$ - телесный размер радиоисточника, найдём

$$\mathbf{V}_{cos} = 2AF\frac{J_1(x_i)}{x_i}, x_i = \kappa_i\theta_s, \kappa_i = 2\pi\sqrt{u_i^2 + v_i^2}. \tag{5}$$

В итоге, значению точки на корреляционной кривой соответствует число, рассчитываемое для каждого момента времени по формуле:

$$\mathbf{Corr} = \sum_i^N |\mathbf{V}_{corr_i}| = \sum_i^N |\mathbf{V}_{cos_i}| = 2AF\sum_i^N \left|\frac{J_1(x_i)}{x_i}\right|. \tag{6}$$

J_1 – функция Бесселя первого рода. Значение **Corr** зависит от 1) длины волны принимаемого радиоизлучения, 2) размеров источника и 3) проекции антенного поля на плоскость, перпендикулярную направлению на источник. Фактор 3) определяет ход **Corr(t)** в течение дня. Фактор 2) зависит от длины волны и может меняться со временем, особенно во всплесках. Фактор 1) даёт возможность оценки спектральной плотности потоков спокойного Солнца и всплесковых источников. Оценим зависимость **Corr** от этих факторов в приближении очень компактного, почти точечного источника и очень большого, которому, с некоторой натяжкой, соответствует солнечный диск.

2.1 Компактный источник ($\kappa_i\theta_s << 1$)

В этом случае $x_i = \kappa_i\theta_s << 1$ для всех антенных пар и $\frac{J_1(x_i)}{x_i} = \frac{1}{2}$ в (6).

$$\mathbf{Corr}(\lambda) = AF(\lambda)N. \tag{7}$$

Этот режим имеет смысл только при анализе нестационарных процессов, иначе вклад активных областей в корреляционную кривую может быть оценён по её отклонению от расчётного тренда спокойного Солнца лишь на дневном интервале наблюдений. В случае радиовсплеска значение $\mathbf{Corr}(\lambda)$ (7) следует отсчитывать от предвсплескового уровня корреляционной кривой. Напомним, что здесь $F(\lambda)$ - падающая на антенну спектральная плотность потока излучения от источника радиовсплеска. $N = n(n-1)/2$, где n - число антенн. Рассмотрим случай, когда поверхность рефлектора идеальна гладкая. В этом случае A не зависит от λ, то $\mathbf{Corr}(\lambda)$ в режиме точечного источника в чистом виде даёт спектр потока излучения компактного радиовсплеска:

$$\mathbf{Corr}(\lambda) \propto F(\lambda). \tag{8}$$

Неидельность поверхности рефлектора можно учесть, применив соотношение Ruze: $F \propto A(\lambda) \propto \mathbf{exp}\left(-\left[\frac{4\pi\sigma}{\lambda}\right]^2\right)$, где σ – среднеквадратичное отклонение реальной поверхности рефлектора от идеальной.

Заметим, что $\mathbf{Corr}(\lambda) \propto s_{ant}F(\lambda)N = \frac{n-1}{2}s_{ant}F(\lambda)n$, где $s_{ant}F(\lambda)n$ - поток излучения, принимаемый всеми антеннами интерферометра. При $\frac{n-1}{2} >> 1$ чувствительность по потоку процедуры $\mathbf{Corr}(\lambda)$ оказывается много выше чувствительности одного большого зеркала, собранного из всех антенн интерферометра. По этой причине множество малых радивсплесков, невидимых многими инструментами в полном потоке, обнаруживаются процедурой $\mathbf{Corr}(\lambda)$.

При нарушении условия $\kappa_i\theta_s << 1$ на высокочастотных пространственных гармониках выполнимость соотношений (7) и (8) может быть восстановлена исключением из рассмотрения длинных антенных баз. В этом случае падает чувствительность, но зато можно точно измерить спектр потока излучения достаточно мощного радиовсплеска в интервале частот СРГ.

Эту процедуру можно использовать не только для верификации найденного спектра, но и для оценки изменения размеров радиоисточника в ходе всплеска.

2.2 Спокойное Солнце ($\kappa_i \theta_s >> 1$)

Подстановка в (6) асимптотического выражения для функции Бесселя при больших аргументах даёт

$$\mathbf{Corr}(\lambda) = AF(\lambda) \sum_i^N \left| {x_i}^{-3/2} \times cos(x_i + \frac{\pi}{4}) \right|, x_i = \kappa_i \theta_s. \tag{9}$$

В отличие от предыдущего случая выражение (9) существенным образом зависит от заполнения антенными базами (u,v)-плоскости. Оценим зависимость $\mathbf{Corr}(\lambda)$ от λ подставив приведённое выше выражение для спектральной плотности потока $F(\lambda)$ и представив волновое число пространственной гармоники в виде $\kappa_i = 2\pi b_i/\lambda$, где b_i - проекция антенной базы на плоскость, перпендикулярную направлению на источник.

$$\mathbf{Corr}(\lambda) = A \frac{kT_b(\lambda)}{\lambda^{1/2}} \pi {\theta_s}^{1/2}(\lambda) \sum_i^N \left| (2\pi b_i)^{-3/2} \times cos(x_i + \frac{\pi}{4}) \right|. \tag{10}$$

Аргумент косинуса зависит от длины волны, и это усложняет процедуру расчёта. Задачу можно упростить. При больших значениях аргумента x_i значение функции $\left| cos(x_i + \frac{\pi}{4}) \right|$ быстро меняется при смене баз (даже если антенны расположены эквидистантно). При очень большом количестве баз среднее значение этой функции близко к 1/2 и теряется зависимость от длины волны. В этих условиях

$$\mathbf{Corr}(\lambda) \propto \frac{kT_b(\lambda)}{\lambda^{1/2}} {\theta_s}^{1/2}(\lambda). \tag{11}$$

Яркостная температура спокойного Солнца и его размер растут с ростом длины радиоволны. Пренебрегая изменением размера и полагая в (11) $T_b(\lambda) \propto \lambda^{\alpha}$ в частотных диапазонах СРГ имеем $\mathbf{Corr}(\lambda) \propto \lambda^{\alpha-1/2}, F(\lambda) \propto \lambda^{\alpha-2}$. Данные СРГ показывают $d\ \mathbf{Corr}(\lambda)/d\lambda > 0, dF(\lambda)/d\lambda < 0$. Это означает, что $0.5 < \alpha < 2$. Когда зависимость $F(\lambda)$ точно установлена, можно правильным образом расположить корреляционные кривые:

$$\mathbf{Corr}(\lambda) \propto F^{(\alpha-0.5)/(\alpha-2)}(\lambda). \tag{12}$$

Такая процедура возможна потому, что вне радиовсплесков вклад активных областей в общий поток излучения мал в сравнении с вкладом спокойного Солнца.

Выражение (10) можно использовать для луча восток-запад, когда Солнце проходит центральный меридиан. В этом случае проекции всех баз просто равны самим базам и сумма $\sum_i^N$ всегда равна одному значению независимо от высоты Солнца - времени года. Более того, можно точно (в рамках используемого приближения) рассчитать зависимость (возможно, слабую) $\sum_i^N$ от λ.

Вводя условное представление о некоторой, зависящей от положения Солнца на небе, эффективной антенной базе b_{eff} получим из (9):

$$\mathbf{Corr}(\lambda, t) \propto A \frac{kT_b(\lambda)}{\lambda^{1/2}} {\theta_s}^{1/2}(\lambda) N[b_{eff}(t)]^{-3/2}. \tag{13}$$

Значение b_{eff} изменяется в течение дня и в самом грубом приближении пропорциональна видимой со стороны Солнца общей длине всех плеч интерферометa. b_{eff} максимально в полдень и это обстоятельство обеспечивает вогнутость корреляционных кривых с минимумом в это время.

2.3 Вариации $\mathbf{Corr}(\lambda)$ во всплеске.

Приближение точечного источника, как показывает опыт работы с $\mathbf{Corr}(\lambda)$, не всегда оказывается достаточным в случае больших радиовсплесков, когда размеры радиоисточника соизмеримы или больше шага высокочастотных пространственных гармоник. Появление в ходе всплеска нескольких пространственно разнесённых или, даже, банальный рост размеров одиночного радиоисточника приводят к появлению инструментального вклада в вариации $\mathbf{Corr}(\lambda)$ как по спектру, так и во времени. Работу этих обстоятельств можно увидеть на примере полного выражения (6) для $\mathbf{Corr}(\lambda)$ модельного источника. Продифференцируем (6) по времени

$$\frac{d\ \mathbf{Corr}}{dt} = 2A \frac{dF}{dt} \sum_i^N \left| \frac{J_1(x_i)}{x_i} \right| + 2AF \sum_i^N \{ \mathbf{sign}(\frac{J_1(x_i)}{x_i}) \frac{d}{dt} (\frac{J_1(x_i)}{x_i}) \} \tag{14}$$

и представим (14) в виде

$$\frac{d(\mathbf{ln\ Corr})}{dt} = \frac{d(\mathbf{ln} F)}{dt} - [\sum_i^N \mathbf{sign}(\frac{J_1(x_i)}{x_i}) J_2(x_i) \frac{d(\mathbf{ln} x_i)}{dt}] / [\sum_i^N \left| \frac{J_1(x_i)}{x_i} \right|],$$
$$d(\mathbf{ln} x_i)/dt = d(\mathbf{ln} \kappa_i)/dt + d(ln\theta_s)/dt, d((ln)F)/dt = F^{-1} dF/dt. \tag{15}$$

Затем, учтя, что за время радиовсплеска заметных изменений на (u,v)-плоскости не произошло, $d\kappa_i/dt = 0$, найдём:

$$\frac{d(\mathbf{ln\ Corr})}{dt} = \frac{d(\mathbf{ln} F)}{dt} - \frac{d(\mathbf{ln}\theta_s)}{dt} [\sum_i^N \mathbf{sign}(\frac{J_1(x_i)}{x_i}) J_2(x_i)] / [\sum_i^N \left| \frac{J_1(x_i)}{x_i} \right|],$$
$$x_i = \kappa_i \theta_s. \tag{16}$$

Здесь $d(\mathbf{ln}F)dt = (1/F)dF/dt$. Первое слагаемое справа показывает вклад в вариацию $\mathbf{Corr}$ истинной вариации потока излучения радиоисточника F. Это "правильное"слагаемое, оно присутствует и при постоянных размерах источника, когда $d\theta_s/dt = 0$ и $\mathbf{Corr}(\lambda) \propto F(\lambda)$.

Второе слагаемое в (15) полностью обусловлено интерференционной вариацией принятого гелиографом сигнала. Для компактных источников вклад этого слагаемого в график корреляции может быть неощутим. В противном случае большого и быстро меняющего размеры источника нарушится условие $\mathbf{Corr}(\lambda) \propto F(\lambda)$. Помимо кажущейся вариации потока излучения, появится и вариация наклона спектра не только из за возможной зависимости θ_s или $d\theta_s/dt$ от длины волны, но и через аргумент $x_i = \kappa_i(\lambda)\theta_s(t)$. Избавиться от этих артефактов можно использованием для расчёта $Corr(\lambda)$ корреляций сигналов антенн малых баз.

2.4 Remarks

* Несмотря на выполнение условия $\Delta\theta << 1$, для пространственных гармоник с большими κ значение $\Delta\varphi$ становится соизмеримым с единицей при приближении к солнечному лимбу. Это обстоятельство требует учёта указанного набега фазы при картографировании Солнца. Однако при анализе особенностей корреляционных кривых, представляющих сумму амплитуд большого числа гармоник, это обстоятельство не так заметно, как в задаче синтеза.

** Совокупность радиоисточников работает как один когерентный источник, когда все они располагаются внутри размера первой зоны Френеля, если смотреть со стороны наблюдателя. Этот же размер можно считать физическим определением точечного источника. Такое определение справедливо для интерферометра до тех пор, пока не нарушится приближение дальнего волнового поля для самой длинной его базы, т.е. когда граница дальнего поля дотянется до наблюдаемого источника.

*** Чтобы интерференционная картина была чёткой необходимо выполнение условия $\Delta t \cdot \Delta\omega/2\pi << 1$.