

Обработка сигналов. Квантование.

С. В. Лесовой

27 марта 2017 г.

1 Результат квантования

Пусть имеется непрерывный сигнал $f(t)$. Квантование это представление $f(t)$ в виде последовательности дискретных величин $f_q(t)$, определенных для любого момента времени. Для аналитической записи результата квантования можно воспользоваться функцией Хевисайда $\eta(x)$. Пусть квантование производится с постоянным шагом q для сигналов больше и меньше нуля. В случае нечетного числа уровней квантования $M = 2N + 1$ можно записать результат квантования как:

$$f_q(t) = q \left[\sum_{n=-N}^{n=N} [\eta(f(t) - q_n) - \eta(-(f(t) + q_n))] \right] \quad (1)$$

где $q_n = (n + .5)q, n = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N$. Для четного числа уровней $M = 2N$:

$$f_q(t) = q \left[\sum_{n=-N}^{n=1} [\eta(f(t) - nq)] + \frac{\eta(f(t)) - \eta(-f(t))}{2} - \sum_{n=1}^{n=N} [\eta(-nq - f(t))] \right] \quad (2)$$

На рисунке 1 показаны примеры передаточных функций квантователя для случая четного и нечетного числа уровней квантования.

2 Квантование шума

Сигналы естественного происхождения, исследуемые в радиоастрономии, обычно представляют собой шум. Поэтому далее рассмотрим квантование именно шумовых сигналов. Шумовой сигнал описывается плотностью распределения вероятностей или соответствующей характеристической функцией. Результат квантования шума можно рассматривать, как изменения в плотности распределения вероятностей. В рассмотрении квантовании шума будем следовать [1]. Пусть исходный сигнал характеризуется гауссовым плотностью распределения вероятностей $\rho(x)$. Процесс квантования можно представить себе, как разбиение площади под $\rho(x)$ на участки с равными интервалами по оси x . Результирующее распределение тогда будет представлять собой гребенку Дирака умноженную на значения соответствующих площадей. На рисунке 2 показано разбиение исходного распределения на четное и нечетное число полосок с интервалами по оси x равными $q[n, n + 1]$ и $q[n - .5, n + .5]$.

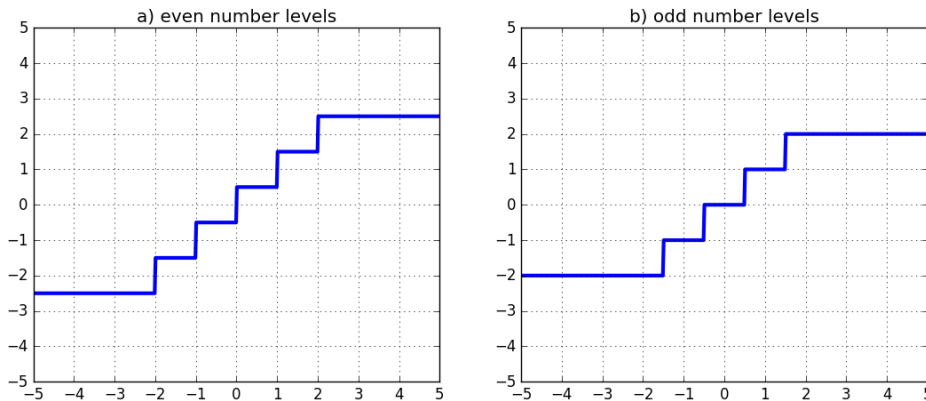


Рис. 1: Передаточные функции для случая четного а) и нечетного б) числа уровней квантования.

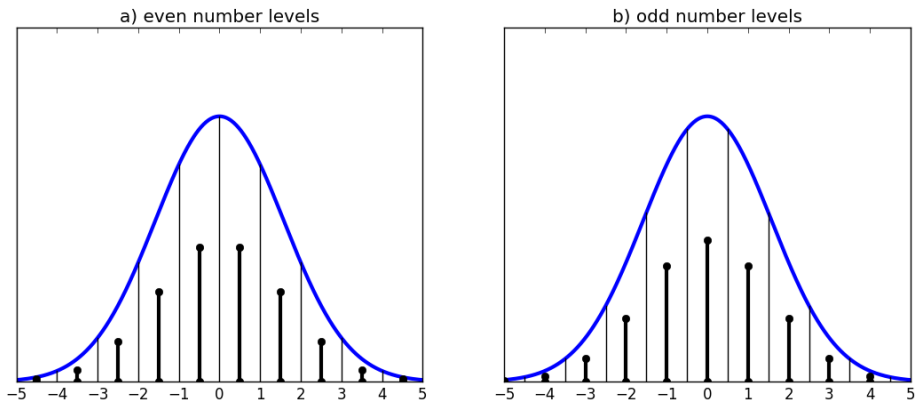


Рис. 2: Квантование плотности распределения вероятностей для случая четного а) и нечетного б) числа уровней. Каждое значение дискретного распределения пропорционально площади под кривой исходного распределения на интервалах $[nq, (n + 1)q]$ и $[(n - 0.5)q, (n + 0.5)q]$.

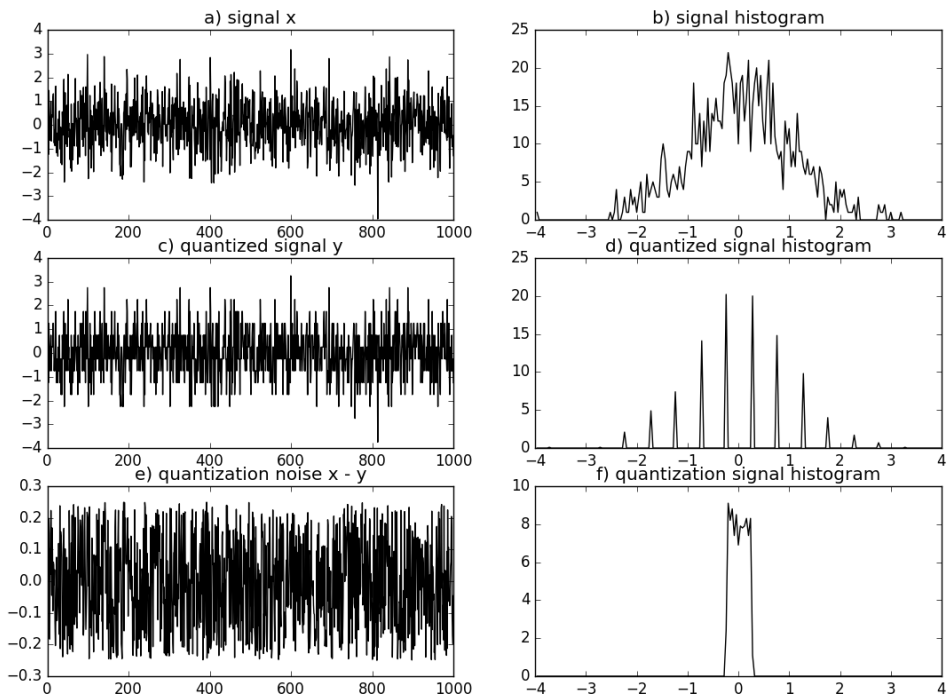


Рис. 3: Квантование шумового сигнала. Исходный сигнал x преобразуется в дискретный с шагом квантования 0.5. Слева показаны исходный и дискретный сигналы, а так же их разница - шум квантования. Справа показанные соответствующие гистограммы.

Квантование можно смоделировать следующим образом. Пусть задан массив действительных случайных чисел S_i с нормальным распределением. Умножим S_i на достаточно большое целое число, а затем целочисленно поделим результат на это же или меньшее число и получим массив S_o . Для пользователей Python это будет выглядеть так: $S_o = ((S_i * A) // B + .5) / (A/B)$. Результат показан на рисунке 3 с). Соответствующие гистограммы исходного и квантованного сигналов показаны на рисунках 3 b) и 3 d). Шум квантования, определенный как $S_i - S_o$ и его гистограмма показаны на рисунках 3 e) и 3 f). На этих рисунках наглядно видно, что гистограмма квантованного сигнала представляет собой набор "взвешенных" дельта-функций, а шума квантования – случайная величина с однородной плотностью распределения вероятностей.

Случайная величина полностью характеризуется ее плотностью распределения вероятностей. Следовательно если возможно восстановить исходную плотность распределения вероятностей из плотности сигнала, прошедшего квантование, можно считать, что потерь информации при квантовании не было. Следуя [1] рассмотрим задачу восстановления исходной плотности распределения вероятности, максимально сводя задачу к аналогичной задаче восстановления формы сигнала при его дискретизации. Рассмотрим рисунок 4. Левая его часть показывает эволюцию плотности распределения вероятностей в процессе квантования, а правая эволюцию соответствующей характеристической функции. Для плотности последовательность операций следующая. Пусть исходный сигнал S_i характеризуется плотностью $\rho_{S_i}(x)$. Шум квантования N пусть задан плотностью $\rho_N(x)$. Сумма $S = S_i + N$ определяется сверткой соответствующих плотностей. Т.е., квантование сводится к умножению гребенки Дирака на свертку плотностей сигнала и шума квантования $\rho_{S_o}(x) = \sum_n \delta(x - nq) [\rho_{S_i}(x) * \rho_N(x)]$, где q – шаг квантования. Для характеристических функций сигнала, шума и квантованного сигнала введем обозначения: $\phi_{S_i}(u), \phi_N(u), \phi_{S_o}(u)$, где $u = 1/x$. Квантование в этом случае описывается сверткой гребенки Дирака с результатом умножения функций сигнала и шума $\phi_{S_o}(u) = \sum_n \delta(u - n/q) * [\phi_{S_i}(u)\phi_N(u)]$.

Описание квантования на языке характеристических функций позволяет определить условия полного восстановления исходной плотности распределения вероятностей по характеристической функции квантованного сигнала [1]. Из рисунка 4 видно, что процесс квантования на языке характеристических функций аналогичен, с точностью до умножения на функцию вида $\text{sinc}(u)$, дискретизации сигнала. Значит можно, аналогично теореме отсчетов, сформулировать условия восстановления исходной плотности распределения вероятностей, как требование отсутствия наложений в свертке $\phi_{S_o}(u)$. Для этого $\phi_{S_i}(u)$ должна быть равна 0 при

$$|u| > \pi/q \quad (3)$$

Это условие можно смягчить если поставить задачу восстановления моментов случайной величины вместо плотности распределения. Моменты вычисляются через производные характеристической функции в 0:

$$\mu_k(x) = E\{x^k\} = \frac{1}{i^k} \left. \frac{d^k \Phi_x(u)}{du^k} \right|_{u=0}, \quad (4)$$

где k – порядок момента, i – мнимая единица. Из рисунка 4j) видно, что в окрестности $u = 0$ производные будут вычисляться верно даже при нарушении условия 3. Важно, чтобы в окрестности вычисления k -й производной не было наложений.

3 Оптимальное квантование

Рассмотрим эффективность квантования в применении к цифровым корреляторам, широко используемых в радиоастрономии. Под эффективностью, в данном случае, будем подразумевать отношение дисперсии аналогового сигнала к дисперсии сигнала, прошедшего квантование. Будем придерживаться изложения этого вопроса в [2]. Пусть исходный сигнал x характеризуется гауссовым распределением плотности вероятности со средним, равным 0. Обозначим y квантованный сигнал. Определим вклад шума квантования в y исходя из того, что коэффициент корреляции между исходным сигналом и шумом квантования должен быть равен 0. Для этого заметим, что корреляция между x и $\Delta = x - \alpha y$ обращается в 0 при $\alpha = \langle x^2 \rangle / \langle xy \rangle$. Значит мы можем определить шум квантования, как $q = x - \langle x^2 \rangle / \langle xy \rangle y$. С другой стороны, полагая $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle = 1$ и $\langle q^2 \rangle = \alpha^2 \langle y^2 \rangle - 1$, получим

$$\eta_Q = \frac{1}{1 + \langle q^2 \rangle} = \frac{\langle xy \rangle^2}{\langle y^2 \rangle}, \quad (5)$$

где η_Q – искомая эффективность квантования. Следуя [2], получим выражение для эффективности двухуровневого квантования. В этом случае дисперсия квантованного сигнала всегда равна 1, а ковариация $\langle xy \rangle = \langle |x| \rangle$ и выражение 6 сведется к

$$\eta_Q = \langle |x| \rangle^2 = \left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x e^{-x^2/2} dx \right]^2 = \frac{2}{\pi}, \quad (6)$$

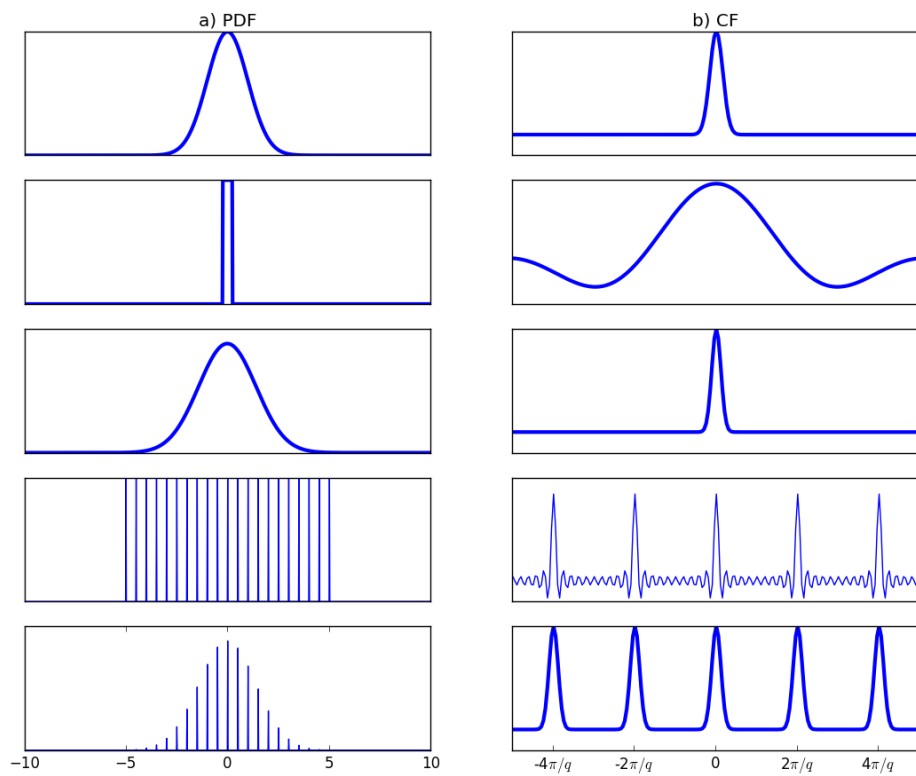


Рис. 4: Процесс квантования как свертка исходного распределения плотности вероятности с распределением ошибки квантования и дальнейшей дискретизацией. а) – для плотности вероятности, б) – для характеристической функции.

полученному Ван Флеком и Миддлетоном. В случае многоуровневого квантования нахождение η_Q сведется к вычислению определенных интегралов на различных интервалах, кратных шагу квантования. Интуитивно понятно, что следует ожидать различной зависимости η_Q от шага квантования для четного и нечетного числа уровней квантования. При четном числе уровней и уменьшении шага квантования, η_Q стремится к результату, полученному при двухуровневом квантовании. То же самое будет для четного числа уровней и при увеличении шага квантования. Значит следует ожидать максимума η_Q при определенном шаге. Для нечетного числа уровней квантования, уменьшение шага тоже ведет к результату двухуровневого квантования, а при увеличении шага квантования η_Q стремится к 0. Выражения для четного и нечетного числа уровней квантования приведены в [2], здесь проведем подробные выкладки для случая четного числа уровней $2N$. Ковариация $\langle xy \rangle$ определяется суммой ковариаций всех уровней. Обозначим шаг квантования ξ , тогда для определенного уровня m $y = \xi \left(m + \frac{1}{2}\right)$ и имеет место:

$$\begin{aligned}\langle xy \rangle_m &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{m\xi}^{(m+1)\xi} x \xi \left(m + \frac{1}{2}\right) e^{-x^2/2} dx = \\ &= \frac{\xi \left(m + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \int_{m\xi}^{(m+1)\xi} x e^{-x^2/2} dx = \\ &= \frac{\xi \left(m + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-m^2 \xi^2/2} - e^{-(m+1)^2 \xi^2/2} \right],\end{aligned}\quad (7)$$

где $m = 0, \dots, N-2$. Для последнего уровня $N-1$ пределы интегрирования нужно изменить:

$$\begin{aligned}\langle xy \rangle_{N-1} &= \frac{\xi \left(N - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \int_{(N-1)\xi}^{\infty} x e^{-x^2/2} dx = \\ &= \frac{\xi \left(N - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} e^{-(N-1)^2 \xi^2/2}\end{aligned}\quad (8)$$

Из-за симметрии нормального распределения можно суммировать только одну его половину. Таким образом:

$$\begin{aligned}\langle xy \rangle &= 2 \sum_{m=0}^{m=N-2} \langle xy \rangle_m + 2 \langle xy \rangle_{N-1} = \\ &= \frac{2\xi}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{2} (1 - e^{-\xi^2/2}) + \frac{3}{2} (e^{-\xi^2/2} - e^{-4\xi^2/2}) + \dots + (N - \frac{3}{2}) (e^{-(N-2)^2 \xi^2/2} - e^{-(N-1)^2 \xi^2/2}) \right] + \\ &= \frac{2\xi}{\sqrt{2\pi}} (N - \frac{1}{2}) e^{-(N-1)^2 \xi^2/2} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi \left[\frac{1}{2} + e^{-\xi^2/2} + e^{-4\xi^2/2} + \dots + e^{-(N-1)^2 \xi^2/2} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{m=N-1} e^{-m^2 \xi^2/2} \right)\end{aligned}\quad (9)$$

Выражение для $\langle y^2 \rangle$ получим аналогичным образом. Задача состоит в том, чтобы привести выражение для η_Q к виду, удобному для численных вычислений. Поэтому используем связь функции ошибок, доступной в любом математическом пакете, с интегралом от нормальной плотности нормального распределения $\int_0^\xi e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)$.

$$\begin{aligned}\langle y^2 \rangle_m &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{m\xi}^{(m+1)\xi} \xi^2 \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 e^{-x^2/2} dx = \\ &= \frac{\xi^2 \left(m + \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{m\xi}^{(m+1)\xi} e^{-x^2/2} dx = \\ &= \frac{\xi^2}{2} \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \left[\operatorname{erf}\left(\frac{(m+1)\xi}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{m\xi}{\sqrt{2}}\right) \right],\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}\langle y^2 \rangle_{N-1} &= \xi^2 \left(N - \frac{1}{2}\right)^2 \int_{(N-1)\xi}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \\ &= \frac{\xi^2}{2} \left(N - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{(N-1)\xi}{\sqrt{2}}\right) \right]\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}
\langle y^2 \rangle &= 2 \sum_{m=0}^{m=N-2} \langle y^2 \rangle_m + 2 \langle y^2 \rangle_{N-1} = \\
\xi^2 \left[\frac{1}{4} \operatorname{erf} \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} \right) + \frac{9}{4} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{2\xi}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} \right) \right) + \dots + \langle y^2 \rangle_{N-1} \right] &= \\
\xi^2 \left[\left(N - \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \sum_{m=1}^{m=N-1} \operatorname{erf} \left(\frac{m\xi}{\sqrt{2}} \right) \right] &
\end{aligned} \tag{12}$$

Окончательно получим:

$$\eta_Q = \frac{\frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{m=N-1} e^{-m^2 \xi^2 / 2} \right)^2}{\left(N - \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \sum_{m=1}^{m=N-1} \operatorname{erf} \left(\frac{m\xi}{\sqrt{2}} \right)} \tag{13}$$

Список литературы

- [1] **Widrow B. and Kollar I.**, 1996, Statistical Theory Of Quantization, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, **Vol. 45 No. 2**
- [2] **Thompson A.R., Emerson D.T., Schwab F.R.**, 2007, Convenient formulas for quantization efficiency, Radio Science, **Vol. 42 RS3022**, doi:10.1029/2006RS003585